Problème 1 : A la librairie

Daniel achète à la librairie un cahier qui coûte 7 euros et une règle. Il paie 11 euros. Clément, de son côté, achète une règle et un feutre. Il paie 2 euros de moins que Daniel. Combien coûte le feutre ?

Problème 2 : Les cours de peinture

Antoine a suivi les cours de peinture à l'école d'art pendant 8 ans et s'est arrêté à 17 ans. Jean a commencé au même âge qu'Antoine et a suivi les cours 2 ans de moins.

À quel âge Jean s'est-il arrêté ?

Cycles : 3 **Classes** : CM2 **Matériel nécessaire** :

Domaine (en référence aux programmes) : Nombres et Calculs

1 - Mots-clés

Arithmétique, Problèmes additifs, Comparaison de procédures de résolution, Transfert de stratégie, Recodage sémantique[1]

2 - Objectifs et notions ciblées

- Montrer qu'il peut exister plusieurs méthodes qui conduisent au même résultat
- Expliquer et comparer des procédures
- Acquérir une représentation plus abstraite d'un problème justifiant l'équivalence entre différentes stratégies de résolution, qui rende l'élève moins dépendant de l'habillage dans lequel le problème est présenté.

3 – Prérequis

Calculs avec des entiers

4 - Stratégies de résolution attendues / Stratégies de résolution observées / Difficultés et erreurs des élèves

Les problèmes 1 et 2 partagent une même structure mathématique, mais impliquent des types de variables différents : une variable « prix » vs une variable temporelle, respectivement. Ces deux types de variables induisent des représentations et des procédures de résolution associées spécifiques. Dans le problème 1, la variable de type « prix » tend à susciter une représentation cardinale des nombres comme effectifs d'ensembles, et une résolution selon une stratégie de -complémentation, qui nécessite trois étapes de calculs, moyennant le calcul du prix de la règle. Cette stratégie, alors même qu'elle n'est pas la plus courte possible, est pourtant privilégiée par une grande majorité d'élèves. Par contraste, dans le problème 2, la variable temporelle donne accès plus facilement à une

---

[1] Le recodage sémantique, conduit par l'enseignant, consiste à faire avancer la compréhension d'un élève en allant à l'encontre de son intuition. Parfois des éléments de la situation orientent vers une certaine conception mathématique, mais celle-ci n'est pas adaptée au problème. Le recodage sémantique va initier une autre façon de percevoir le problème, qui, elle, est cohérente avec les objectifs mathématiques visés.

représentation ordinale des nombres comme positions sur une ligne numérique, et à une résolution selon une stratégie fondée sur la comparaison qui ne requiert qu'un seul calcul. Ces deux stratégies sont illustrées sur le problème 1 dans la Figure 1 :

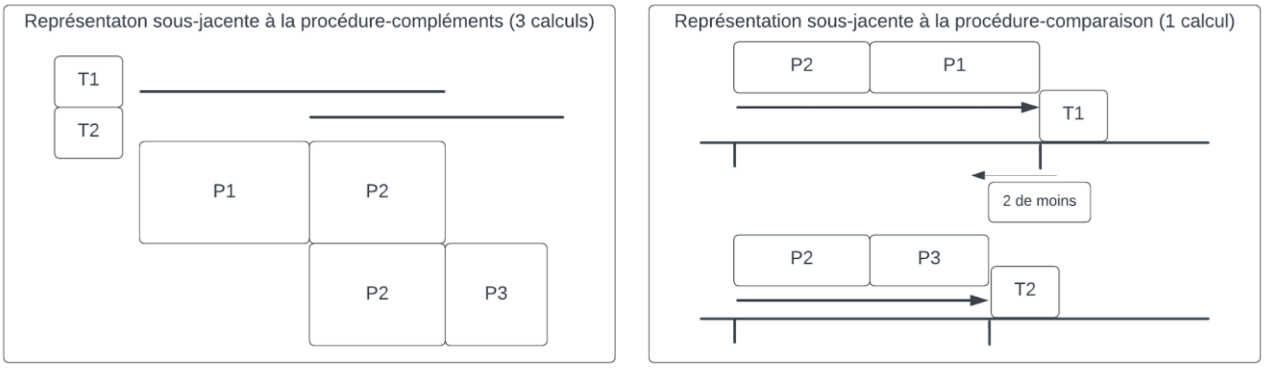

Figure 1

5A- Mise en œuvre de la séance / Moyens pour aider les élèves

La démarche proposée consiste à établir une comparaison entre les stratégies puis entre les problèmes. L'objectif est de faire émerger la notion de partie commune. Si besoin, l'enseignant fait constater l'existence de cette partie commune dans chaque problème. Il commence par faire lire le premier problème et incite à comparer les deux stratégies de résolution, en posant des questions comme :

1. Quelle est la partie qui ne bouge pas dans ce problème ?
2. Pouvez-vous résoudre ce problème en calculant le prix de la règle ?
3. Pouvez-vous résoudre ce problème sans calculer le prix de la règle ?
4. Laquelle de ces deux méthodes vous paraît la plus intéressante ?
5. Expliquez pourquoi on obtient le même résultat avec ces deux méthodes.(On attend de l'élève qu'il explique que (7-2) = 11-2 - (11-7). La généralisation [P1 - D = T1 - D - (T1 - P1)] n'est pas attendue à ce niveau).

Puis l'enseignant fait lire le deuxième problème et incite les élèves à faire l'analogie entre les deux problèmes au moyen de questions comme :

6. Pouvez-vous résoudre ce problème sans calculer l'âge de départ auquel Antoine a commencé la peinture ?
7. Pouvez-vous résoudre ce problème en calculant l'âge de départ auquel Antoine a commencé la peinture ?
8. Y a-t-il quelque chose dans ce problème qui soit comme dans le premier problème ?
9. Quelle est la partie qui ne bouge pas dans ce problème ?

5B- Pistes de Différenciation

Une manière *plus directe* d'induire la stratégie de comparaison sur le problème 1 consiste à le présenter sans la valeur du prix total, comme suit : « Daniel achète à la librairie un cahier qui coûte 7 euros et une règle. Clément, de son côté, achète une règle et un feutre. Il paie 2 euros de moins que Daniel. Combien coûte le feutre ? ». On pourrait partager la classe en deux groupes, présenter cette version du problème à l'un des sous-groupes, et la version standard du problème à l'autre sous-groupe, puis réunir les deux sous-groupes pour comparer les stratégies des élèves, en faisant ainsi valoir que l'on n'a pas besoin de la valeur du prix total de départ pour résoudre le problème.

5C- Trace écrite : Institutionnalisation *(qu'est-ce la classe doit retenir ?)*

Nous avons constaté que les problèmes étudiés peuvent se résoudre de deux façons. Nous avons aussi remarqué que dans chaque problème il y a une partie commune. Comme dans chaque problème, les 2 ensembles ont une partie commune, dans la 2e stratégie, la différence porte sur les parties qui ne sont pas communes. Même si l'habillage des problèmes oriente vers des stratégies différentes, ces problèmes peuvent se résoudre de la même manière.

6 - Prolongements possibles

On peut générer des variantes de ce problèmes en faisant varier d'une part le type de variable (effectif, prix, âge, …) et d'autre part, la nature de la grandeur cherchée (recherche de la partie vs recherche du tout). Le tableau suivant donne des exemples, et situe les problèmes présentés dans cette typologie :

Type de variables	Recherche de la valeur de la partie	Recherche de la valeur du tout
EFFECTIF	Dans la famille Bernard, il y a 6 personnes. Quand les Bernard vont avec les Durand à la pizzeria, ils sont 9 à table. Quand les Durand vont avec les Rousseau à la pizzeria, ils sont 2 de moins à table. Combien sont-ils dans la famille Rousseau ?	Dans la famille Richard, il y a 5 personnes. Quand les Richard partent en vacances avec les Robert, ils sont 9 à l'hôtel. Dans la famille Dumas, il y a 3 personnes de moins que dans la famille Richard. Les Robert partent en vacances avec les Dumas. Combien seront-ils à l'hôtel ?
PRIX	*Problème 1 : à la librairie*	Laurent achète au supermarché un classeur qui coûte 8 euros et des ciseaux. Il paie 14 euros. Un feutre coûte 3 euros de moins qu'un classeur. Augustin achète des ciseaux et un feutre. Combien doit-il payer ?
ÂGE / DURÉE	Pauline a suivi les cours de danse au conservatoire pendant 11 ans et s'est arrêtée à 17 ans. Julie a commencé au même âge que Pauline et s'est arrêtée 4 ans plus tôt. Combien de temps Julie a-t-elle suivi les cours ?	*Problème 2 : Les cours de peinture*

HAUTEUR	Une brique blanche a une hauteur de 6 cm. On la pose sur une brique noire. La hauteur de la pile est de 11 cm. Une brique verte est posée sur la même brique noire. Cette pile mesure 2 cm de moins. Quelle est la hauteur de la brique verte ?	Un dé rouge a une hauteur de 5 cm. On le pose sur un dé bleu. La hauteur de la pile est de 7 cm. Un dé jaune est posé sur lemême dé bleu. Ce dé jaune mesure 3 cm de moins que le dé rouge. Quelle est la hauteur de la pile ?
POIDS	Un sac de poires pèse 5 kg. On le pèse avec un sac de gruyère râpé. La balance indique 11 kg. Un pack de lait est pesé avec le même sac de gruyère. La balance indique 2 kg de moins. Combien pèse le pack de lait?	Un sac de farine pèse 8 kg. On le pèse avec un sac de crevettes. La balance indique 14 kg. Un sac de moules est pesé avec le même sac de crevettes. Ce sac de moules pèse 3 kg de moins que le sac de farine. Quel est le poids indiqué par la balance?

7 - Références

- S. Gamo, S. Nogry, E. Sander, « Apprendre à résoudre des problèmes en favorisant la construction d'une représentation alternative chez des élèves scolarisés en éducation prioritaire », *Psychologie Française*, Volume 59, Issue 3, 2014, pp. 215-229, ISSN 0033-2984, https://doi.org/10.1016/j.psfr.2014.02.002
- Gamo, S., Sander, E., & Richard, J. F., « Transfer of strategy use by semantic recoding in arithmetic problem solving»,. *Learning and Instruction*, 20, 2010, pp. 400–410, https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2009.04.001
- Gamo, S., Taabane, L., & Sander, E., Rôle de la nature des variables dans la résolution de problèmes additifs complexes, *L'Année psychologique*, 111, 2011, pp. 613–640, https://doi.org/10.3917/anpsy.114.0613
- Sander, E., Levrat, B., Brissiaud, R., Porcheron, P., & Richard, R., (2003) *Conceptualisation et propriétés sémantiques des situations dans la résolution de problèmes arithmétiques* : rapport d'étape. Ministère de la Recherche ; appel d'offres 2002, École et Sciences Cognitives : les apprentissages et leurs dysfonctionnements. Université Paris 8.

Cette fiche a été rédigée par Emmanuel Sander & Romain Bourdoncle.