

MISES EN COMMUN ET ARGUMENTATION EN MATHÉMATIQUES

Jacques Douaire, IUFM de Versailles, Centre d'Anthony
Christiane Hubert, IUFM de Créteil, Centre de Livry-Grignan
Chercheurs associés à l'INRP, équipe ERMEL

Les mises en commun constituent un moment privilégié pour l'analyse et la critique des productions personnelles produites par les élèves lors de la résolution de problèmes inédits pour eux. Mais l'organisation de la validation lors de ces mises en commun est souvent délicate à prévoir et à conduire par les maîtres.

En effet, la validation des solutions et des procédures implique que les élèves aient la responsabilité de la formulation et de la critique de leurs productions afin qu'ils puissent faire évoluer des méthodes, expliciter des conceptions erronées ou des connaissances appropriées. La prise en charge par les élèves de cette validation, lors de mises en commun où les échanges oraux jouent un rôle essentiel, vise aussi à leur permettre d'établir progressivement un rapport personnel aux mathématiques : c'est à eux de déterminer si un résultat, une proposition, un raisonnement est juste ou faux et pourquoi.

Au primaire, les méthodes de validation évoluent en passant d'abord de la réalisation de la solution pratique centrée sur l'action (par exemple la distribution d'objets pour un problème de partage au Cycle 1), puis par la seule vérification du respect des contraintes (tout a été distribué et chacun en a autant), jusqu'à la production de raisonnements fournissant de nouveaux types de preuve ; au Cycle 3, le seul constat d'une solution erronée ne suffit pas toujours à remettre en cause les procédures concernées, leur critique suppose un débat.

Les tâches auxquelles un maître est confronté pour mener à bien ces mises en commun sont multiples. Il doit analyser les productions des élèves issues de leurs recherches préalables, déterminer les connaissances visées dans la mise en commun, mettre en place les conditions du débat (permettre la formulation, la compréhension, la critique des productions), garantir que les critères d'accord émergeant lors de ces échanges soient compatibles avec ceux de la rationalité mathématique, prendre des décisions à l'issue des échanges. Ces tâches sont souvent difficiles à maîtriser par des maîtres débutants.

Cet article présente, à partir de l'analyse d'une situation, quelques pistes de réflexion sur les caractéristiques des mises en commun, sur les compétences des élèves en jeu dans ces débats, ainsi que sur la gestion de ces phases par des maîtres débutants. Il s'appuie sur des travaux issus de plusieurs recherches réalisées ou en cours, menées par l'équipe de didactique des mathématiques à l'école élémentaire de l'INRP.

1- Analyse de la situation "Les trois nombres qui se suivent"

Cette situation est présentée en septembre ou en octobre au CM1. La première phase propose de chercher trois nombres ¹ qui se suivent dont la somme est donnée, la seconde phase de prouver que 25 n'est pas la somme de trois nombres qui se suivent, puis la troisième phase de déterminer quels sont les nombres qui sont la somme de trois nombres qui se suivent.

Chacune des trois phases de cette situation comporte une mise en commun, qui vise des buts différents.

1.1 La première phase a pour enjeu de produire une solution pour des valeurs particulières

Dans une première étape, les élèves résolvent le problème pour 96 (solution 31, 32, 33). Au début du CM1 cette recherche suppose l'élaboration de méthodes personnelles.

Voici quelques exemples de solutions formulées par des élèves lors de la mise en commun qui suit cette première recherche :

- choisir trois nombres dont la somme est correcte, mais qui ne se suivent pas comme $25 + 25 + 46$ ou $30 + 56 + 10$ ("J'ai calculé $40 + 56$ et j'ai enlevé 10 à 40 et j'ai mis un 10 après 56") ; certains élèves privilégient une somme de multiples de 10 pour avoir un ordre de grandeur (comme $40 + 20 + 20$) puis effectuent des essais ;

- décomposer 96 en partant de 90 et considérer que 6 c'est $1 + 2 + 3$, d'où la solution 31, 32, 33 ("Trois fois trois neuf, donc si on met un zéro ça fait quatre vingt dix et comme les nombres doivent se suivre $1 + 2 + 3 = 6$ ", ou "J'ai pensé trois fois 30 faisait 90 et j'ai rajouté 1, 2, 3") ou proposer $32 + 32 + 32 = 96$, puis constater que les nombres ne se suivent pas ("J'avais trouvé $32 + 32 + 32$, j'ai essayé $32 + 33 + 34$ qui donnait un résultat trop grand, alors j'ai fait $31 + 32 + 33$ ") ;

- exploiter des premiers calculs : "Je trouve la moitié et je fais un de moins et un de plus : 47, 48, 49 ; j'ai vérifié et j'ai trouvé 144. Je me suis rapproché de plus en plus de 96. J'ai trouvé 31, 32, 33" ;

- faire des essais successifs de triplets de nombres qui se suivent, certains élèves démarrant de 1, 2 et 3...

Pour des élèves qui n'auraient pas été confrontés à des situations de recherche les années précédentes, ce problème posé au début de CM1 est un des premiers dans lequel ils aient à élaborer des méthodes personnelles ; certains élèves peuvent se contenter de produire un résultat ne prenant en compte qu'une seule contrainte et attendre que le maître corrige leur solution. Le premier but de la mise en commun est alors de permettre à tous les élèves de comprendre qu'ils doivent tenir compte des deux contraintes (les trois nombres se suivent et leur somme est 96) et vérifier par eux-mêmes leurs résultats.

De plus les élèves ont souvent besoin de fixer explicitement une des contraintes pour faire évoluer leurs essais dans le bon sens ; les échanges oraux mettent en évidence l'utilité de différentes techniques améliorant les procédures par essais successifs : noter ses

¹ Dans cette situation il s'agit toujours de nombres entiers.

essais avant d'effectuer les calculs, prendre en compte l'écart entre le résultat et le but, relire ses essais antérieurs pour diminuer le nombre d'essais...

Une recherche individuelle est ensuite reprise pour 354, valeur plus grande qui nécessite de mieux organiser les essais ; cette nouvelle recherche permet à des élèves de réinvestir certaines procédures plus efficaces explicitées par d'autres précédemment.

Lors de la mise en commun qui suit cette recherche, des procédures sont formulées telles que :

- choisir un ordre de grandeur et essayer des suites autour de 100, exemple $120 + 121 + 122 = 363$, constater que c'est trop grand, puis produire d'autres essais en descendant ;

- partir de l'écriture de 354 et essayer d'obtenir 4 comme chiffre des unités en additionnant trois nombres qui se suivent composés d'un seul chiffre : "avec 7, 8, 9, on obtient 24" ;

- remarquer que $3 \times 18 = 54$, et effectuer $17 + 18 + 19 = 54$ (en explicitant que "18 est le nombre du milieu"), puis compléter au niveau centaines, pour obtenir la solution 117, 118, 119.

Dans cette première phase, les mises en commun vont permettre à l'élève, par la formulation de ses productions, d'analyser ses propres résultats, d'explicitier ses procédures, de prendre conscience de certaines erreurs. Ces mises en commun vont aussi l'amener à reformuler des méthodes présentées par d'autres pour comprendre ce en quoi elles sont éventuellement plus performantes que les siennes ; elles vont aussi lui permettre de critiquer la pertinence ou la mise en œuvre de certaines procédures. L'exigence de précision dans les formulations conduit aussi à revenir sur des connaissances antérieures (en particulier la différence entre "chiffre" et "nombre").

Les objectifs de cette phase sont donc d'abord de permettre aux élèves d'identifier les deux contraintes du problème (les trois nombres cherchés doivent se suivre et leur somme doit être égale au nombre donné) mais aussi d'améliorer la gestion de leurs essais.

Les critères de validation pour les élèves, sont donc, au-delà du respect des contraintes, la fiabilité, la rapidité ou l'économie des méthodes de calcul. Pour ce premier problème les méthodes relèvent d'un savoir technique qui est provisoire ; en effet, au cours du CM1 et au CM2 une meilleure structuration arithmétique des nombres, l'amélioration des capacités de calcul réfléchi, voire la maîtrise de la division fourniront de nouvelles techniques de calcul. Dans cette phase, le maître ne cherche donc pas l'institutionnalisation d'une technique particulière.

1.2 La deuxième phase de cette situation a pour enjeu de prouver une impossibilité

Le maître propose la recherche de trois nombres qui se suivent dont la somme est égale à 25 (il n'y a pas de solution).

Les élèves ont en général besoin de beaucoup d'essais pour douter de l'existence d'une solution et découvrir qu'il n'est pas toujours possible de trouver trois nombres qui se suivent pour une somme donnée. Lors d'un bilan collectif éventuel, le maître fait simplement formuler que des solutions proposées (par exemple $7 + 8 + 10$ ou $8 + 8 + 9$) ne respectent pas les contraintes, sans chercher à faire expliciter des justifications.

Puis, les élèves ont à répondre, par écrit et individuellement à la question : "Pourquoi n'y a-t-il pas de solution pour 25 ?", lorsqu'ils pensent qu'il n'est pas possible de trouver une solution. En effet, pour pouvoir produire une proposition répondant à cette question, il est nécessaire qu'ils abandonnent la recherche d'une solution par des essais de calcul.

Les différentes propositions sont collectées par le maître et discutées par toute la classe. Certaines sont éventuellement reformulées par leurs auteurs pour être mieux comprises. Elles relèvent de plusieurs catégories :

a) celles qui n'apportent pas de justification autre que la conviction de l'impossibilité : "parce qu'on ne peut pas calculer" ;

b) celles pour lesquelles un accord se fait rapidement ; par exemple, celles pour lesquelles on est sûr qu'elles sont fausses, comme : "25 est un nombre trop petit". Des contre-exemples tels que "15 qui est plus petit que 25 est la somme de trois nombres qui se suivent (4, 5, 6)" sont formulés par les élèves ;

c) celles pour lesquelles il n'y pas de certitude ou d'accord sur leur valeur de vérité et qui doivent être débattues :

- des propositions affirmant une propriété vraie, mais qui ne constitue pas une preuve de l'impossibilité pour 25 d'être la somme de trois nombres consécutifs comme "avec 25, il n'y a pas de solution parce que 25 est impair" ;

- des propositions vraies mais insuffisantes, telles qu'elles sont formulées. Par exemple : "J'ai essayé $7 + 8 + 9$, ça fait 24" ;

- des propositions vraies, apportant la preuve, par exhaustivité des essais, que l'on ne peut pas trouver trois nombres qui se suivent dont la somme est 25 : "On trouve : $6 + 7 + 8 = 21$; $7 + 8 + 9 = 24$; $8 + 9 + 10 = 27$ " qui encadrent le nombre 25.

Les objectifs de cette mise en commun peuvent être la prise de conscience de la nécessité d'une justification autre que le constat de l'impossibilité ("ce n'est pas possible parce que je n'ai pas trouvé"), ou le fait qu'énoncer une propriété vraie n'est pas suffisant (les élèves sont ainsi amenés à distinguer entre la valeur d'un énoncé et la valeur de vérité de l'argument qui le fonde), ou la mise en évidence du rôle du contre-exemple pour infirmer une proposition. Par exemple une proposition comme "avec 25, il n'y a pas de solution parce que 25 est impair" sous-entend, en fait, que seuls les nombres pairs sont solution du problème. On voit qu'il y a confusion entre la vérité d'une proposition (25 est bien un nombre impair), et la validité de l'inférence utilisant cette propriété (on ne peut pas dire qu'il est impossible de trouver trois nombres qui se suivent dont la somme est 25 parce que 25 est impair). Certains élèves sont capables d'argumenter sur cette propriété de la parité, en proposant d'eux-mêmes un contre-exemple. Ils expriment ainsi qu'il existe bien des nombres impairs (au moins un !), par exemple 45, qui sont la somme de trois nombres qui se suivent.

Cette validation des propositions ne s'appuie pas sur l'économie ou la fiabilité des méthodes comme lors de la phase précédente, mais sur des caractéristiques de la preuve en mathématique que progressivement les élèves vont avoir à appréhender : en mathématique une proposition est soit vraie, soit fausse, un exemple ne prouve pas une proposition, un contre-exemple infirme une proposition... L'explicitation de ces critères, à l'occasion d'un tel problème de preuve, apparaît lors des débats argumentatifs. Ces raisonnements pour établir le vrai ne sont pas provisoires, ils ne varient pas selon les connaissances des élèves, comme peuvent l'être des techniques de calcul qui seraient ensuite abandonnées.

1.3 La troisième phase a pour enjeu de trouver un ensemble de solutions, qui pourraient être définies par une proposition commune

Le problème posé est "comment savoir si un nombre est la somme de trois nombres qui se suivent ?"

L'objectif est donc de formuler une propriété générale, qui se dégage des exemples, et de la justifier.

Le plus souvent les élèves se centrent sur la production d'une liste de solutions sans chercher une formulation générale. Lors de la mise en commun ils énoncent facilement le fait que les solutions vont de trois en trois, en justifiant que l'on passe d'un triplet au suivant en ajoutant 3 à la somme ("on a ajouté 1 à chacun des nombres" ou "48, c'est $15+16+17$, 51 c'est $16+17+18$, on a remplacé 15 par 18"). Mais si les élèves expriment que c'est "trois fois celui du milieu" (le premier nombre c'est le milieu moins 1 et le dernier c'est le milieu plus 1), ou que "c'est 3 fois 16, puis 3 fois 17...", en général en début de CM1, ces nombres ne sont pas reconnus comme des multiples de 3. Pour justifier une solution générale, les élèves ont besoin de recourir à une propriété ("les nombres qui sont égaux à trois fois un autre nombre sont les multiples de 3"), qui n'est pas encore suffisamment disponible au CM1, contrairement au CM2 où le recours à cette propriété sera plus immédiat. La mise en commun peut donc aboutir à l'acquisition d'une connaissance.

2 - Compétences des élèves dans le domaine de l'argumentation mathématiques

Ces compétences sont sollicitées lors de la deuxième phase de la situation "Les trois nombres qui se suivent". Elles le sont aussi, lors de débats au sein de petits groupes ou lors de mises en commun, ayant pour but pour déterminer en général la valeur de vérité de certaines propositions, menés dans d'autres situations (cf. paragraphe 3) expérimentées dans le cadre d'une recherche portant sur le rôle de l'argumentation dans les apprentissages numériques ². Cette recherche nous a d'abord conduits à préciser les caractéristiques de l'argumentation en mathématiques au primaire, en prenant en compte des travaux récents menés dans des domaines différents (psychologie, didactique, épistémologie, logique, philosophie, ou relatifs à la maîtrise de la langue...) et à analyser les compétences relatives aux débats, à la preuve, à la rationalité auxquelles peuvent accéder les élèves du Cycle 3. Nous avons aussi explicité des caractéristiques de ces situations où les apprentissages s'appuient de façon essentielle sur des phases de débat

2 Recherche INRP "Argumentation et apprentissages mathématiques au cycle 3". Les productions issues de cette recherche sont présentées dans les publications de l'équipe : ERMEL CM1 ("Apprentissages numériques et résolution de problèmes au CM1" ed. Hatier 1997), ERMEL CM2 ("Apprentissages numériques et résolution de problèmes au CM2" ed. Hatier 1999).

argumentatif (cf. paragraphe 3). Ces différents aspects sont exposés dans une publication spécifique “*Vrai ? Faux ?... On en débat ! De l’argumentation à la preuve au cycle 3*”³.

Nous avons pu constater que les élèves sont capables :

- de prendre en compte les arguments des autres élèves, d’apporter un argument à l’appui du débat, de reprendre un argument de quelqu’un d’autre⁴, d’abandonner très rapidement une argumentation extra-mathématique. Ils parviennent aussi à utiliser progressivement un vocabulaire précis, nécessaire pour permettre la communication lors de ces débats ;

- de prendre conscience de la nécessité de prouver, de ne pas en rester à des simples constats, de se mettre à douter, d’appuyer une propriété par un argument ;

- de distinguer entre une justification par une propriété vraie, mais non probante (comme 25 n’est pas la somme de trois nombres qui se suivent car 25 est impair) et celle par une propriété qui recouvre la proposition énoncée.

Le contre-exemple est produit à propos, et est reçu comme une infirmation de la proposition.

Le niveau de preuve que peuvent employer en général les élèves nous paraît être celui que Balacheff appelle “l’exemple générique”⁵ ; il consiste à montrer pourquoi une proposition est vraie en expliquant des transformations générales opérées sur un objet particulier. Par exemple, dans la situation “les trois nombres qui se suivent” des élèves justifient pourquoi les solutions vont de trois en trois s’appuyant sur des valeurs numériques. Ils ne choisissent pas un nombre comme preuve d’une proposition générale, mais pour décrire un procédé, une série de transformations applicables à d’autres nombres, ce qu’ils ne peuvent faire autrement, ne disposant pas d’un langage symbolique adéquat... De plus, en fonction des connaissances en jeu dans certaines situations, les élèves sont aussi capables de produire des déductions en s’appuyant sur l’énoncé de propriétés.

En fonction de ces différents constats, nous pensons qu’il est possible de proposer à des élèves du Cours Moyen, notamment lors des mises en commun, des débats argumentatifs dont l’enjeu est de prouver la validité de propositions qu’ils ont eux-mêmes produites lors de la résolution de problèmes. En ce sens, tout en étant conscients des limites, tant au niveau des connaissances que des capacités de formulation ou de symbolisation chez ces élèves, nous pensons que la confrontation à des problèmes mathématiques et à la validation de leurs solutions contribue à une approche personnelle des mathématiques, qui se poursuit au delà de l’école primaire. La question se pose de l’articulation entre les débats argumentatifs visant un travail de preuve menés à l’école primaire, et ceux relatifs à l’initiation au raisonnement déductif au collège, ainsi que celle de la perception par les élèves des spécificités des argumentations développées dans différents domaines scientifiques (mathématiques, sciences expérimentales...) pour établir la validité de productions.⁶

3 Equipe ERMEL : “*Vrai ? Faux ?... On en débat ! De l’argumentation à la preuve au cycle 3*” (Coordination Jacques Douaire et Christiane Hubert - INRP 1999)

4 Comme l’ont montré des travaux menés dans d’autres disciplines (Cf. GOLDER C. *Le développement des discours argumentatifs* Delachaux et Niestlé, Genève 1996).

5 BALACHEFF N. Une étude du processus de preuve en mathématiques chez les élèves de collège Thèse, Université Joseph Fourier Grenoble- 1988.- p 57.

6 Ces questions sont étudiées dans le cadre de la recherche pluridisciplinaire de l’INRP (Département de Didactique des disciplines) : “Argumentation et démonstration dans les débats et discussions en classe”.

3- Mises en commun et argumentation

La situation "Les trois nombres qui se suivent" fait partie d'un ensemble de situations expérimentées dans le cadre de la recherche déjà citée sur le rôle de l'argumentation dans les apprentissages numériques au cycle 3. C'est en nous référant en partie à ces travaux que nous présentons les éléments suivants :

1 - Certains échanges oraux de cette situation relèvent de l'explication (rappel des données du problème, description d'une procédure, demande d'explicitation...), d'autres échanges relèvent de l'argumentation (comme la critique des preuves d'une impossibilité). Dans ce cas, les élèves ont à établir par des raisonnements la justesse ou l'inexactitude de propositions. L'émergence et la reconnaissance de preuves est un processus auquel va adhérer la communauté que forme la classe, selon des critères qui sont ceux de la communauté scientifique ; celle-ci constituant ce que C.Perelman appelle un "auditoire universel"⁷.

Comme le précise Duval, l'explication et le raisonnement (argumentatif ou démonstratif) se distinguent, car ce dernier a pour but de modifier la valeur épistémique d'un énoncé-cible (son degré de crédibilité aux yeux du sujet : évidente, absurde, vraisemblable, nécessaire, possible, neutre...), et de déterminer sa valeur de vérité (vrai, faux ou indéterminé), ce qui n'est pas l'objectif d'une explication. Dans une explication, les raisons avancées ont une valeur quasi-descriptive, leur valeur épistémique ne joue pratiquement aucun rôle. Par ailleurs "si la production de raisons relève de l'explication, elle représente souvent une activité trop importante par elle-même pour entraîner *ipso facto* un examen explicite de leur acceptabilité"⁸. De plus l'argumentation déployée en mathématique se différencie de l'argumentation telle qu'elle peut se développer dans des domaines non scientifiques : dans une argumentation scientifique l'examen d'acceptabilité de ces raisons s'appuie sur des raisonnements et des connaissances reconnus comme licites car situés dans un cadre scientifique bien défini.

2 - Les mises en commun de chacune des phases de la situation "Les trois nombres qui se suivent" diffèrent par leurs objectifs ; ceux-ci portent sur des méthodes dans la première phase, des raisonnements dans la seconde, des connaissances dans la troisième. Ces mises en commun diffèrent aussi par les critères de jugement mis en œuvre qui sont relatifs à des techniques pour la première (économie du nombre d'essais, fiabilité des calculs...), à la rationalité mathématique pour la seconde, à des propriétés reconnues pour la troisième. Les débats argumentatifs peuvent donc avoir des finalités différentes :

- certains visent à émettre des critiques sur des résultats, sur des méthodes, dont la validité ne s'exprime pas en terme de vrai ou faux, mais en terme d'efficacité, de rapidité... comme dans la première phase de cette situation. Toutes les phases d'argumentation menées lors de séquences de mathématiques ne sont pas des phases de preuve : il ne s'agit pas toujours d'établir qu'une proposition est vraie ou fausse. Dans certains cas, le débat peut porter comme ici sur des caractéristiques d'une méthode.

- d'autres visent à prouver une proposition mathématique. Dans ce cas le rôle de ces débats peut donc être dans un premier temps, par le passage de convictions privées à un questionnement public, de poser la question de la valeur de vérité de la

7 C.Perelman et L.Olbrechts-Tyteca "Traité de l'argumentation" (Ed. Univ. Bruxelles 1958).

8 Duval R. "Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive" - ("Petit x" n° 31 1992-1993 p 40).

proposition ; la seule affirmation par un élève de la valeur épistémique de la proposition à ses yeux (il est "persuadé que c'est vrai") n'est pas acceptée comme preuve. Puis, dans un deuxième temps le rôle des débats est d'établir la valeur de vérité des propositions mathématiques.

La dimension sociale du travail de preuve peut donc se situer à la fois dans le passage de l'affirmation à un questionnement (hypothèse, conjecture, interrogation sur la validité d'une proposition...), puis dans le passage de cette question à la propriété prouvée lors de la formulation ou de la critique des preuves. Nous reprenons ici l'analyse de F. Gil "une proposition est dite prouvée si, ayant été obtenue moyennant une méthode généralement reconnue, elle fait l'objet d'une croyance justifiée, et cette formulation permet de distinguer quatre versants dans la théorie de la preuve : un élément sémantico-formel (la proposition qu'il s'agit de prouver), un dispositif objectif (la méthode) ayant des effets subjectifs (la croyance) et intersubjectifs (la reconnaissance générale)." ⁹

3 - Les situations que nous avons expérimentées où les apprentissages s'appuient de façon essentielle sur des phases de débat argumentatif, commencent par la recherche de solution pour une ou des valeurs particulières. Puis, dans un deuxième temps elles présentent un nouveau problème centré sur un enjeu de preuve. Ces deux phases (recherche d'une solution en s'appuyant sur des calculs, recherche d'une preuve) doivent être bien différenciées. Les conditions du débat, les critères pour admettre ou réfuter une proposition, la nécessité de s'appuyer sur des connaissances mathématiques appropriées et reconnues assurant la validité de ces propositions sont explicitées lors de cette deuxième phase.

Certaines situations, comme "Les trois nombres qui se suivent", ont pour but principal de donner aux élèves le goût de la recherche, de leur permettre de développer des compétences méthodologiques, mais aussi de leur faire appréhender des éléments de rationalité. Dans ce but, nous avons expérimenté un ensemble de six problèmes ouverts destinés au CM1 et au CM2 présentant dans une seconde phase des enjeux de preuve différents ¹⁰. Dans ces situations il s'agit de prouver l'impossibilité d'une solution, par exemple trouver deux nombres entiers dont la somme est paire et la différence est impaire ("Somme et différence", ERMEL CM2), ou que toutes les solutions ont été trouvées ("Golf", ERMEL CM2) ou de prouver que la solution trouvée dans un problème d'optimisation est la meilleure possible ("Le plus grand produit" et "La piscine", ERMEL CM1), ou de prouver une solution générale ("Somme des n premiers nombres", ERMEL CM2).

D'autres situations sont des situations-problèmes qui visent à construire de nouvelles connaissances. Certaines s'appuient sur la critique de l'efficacité interne d'un modèle mis en œuvre par les élèves (lorsque l'on vise une évolution d'une technique ou la convergence des procédures vers une qui serait privilégiée). D'autres visent la remise en cause de l'adéquation de modèles plus ou moins implicites à partir de conflits entre les productions des élèves (par exemple les différentes procédures produites pour comparer des nombres décimaux au CM1) ou par la confrontation des différentes solutions aux contraintes de la situation (cas de l'agrandissement d'une figure).

9 F.Gil "Preuve" Aubier 1988 p 10.

10 Cf. les publications de l'équipe : "Vrai? Faux ?...On en débat! De l'argumentation à la preuve en mathématiques au cycle 3" pp 101-127 ainsi que ERMEL CM1 et ERMEL CM2.

Dans tous les cas la permanence d'un enjeu est nécessaire pour permettre des débats argumentatifs. Cela suppose en premier lieu que la tâche proposée préalablement constitue un réel problème ; quand la production de la solution est trop facile les élèves sont convaincus de la justesse de leur résultat, une mise en commun ne présente pas d'intérêt suffisant ; mais aussi lors d'une mise en commun visant la critique de l'efficacité des méthodes, si aucun résultat erroné n'est produit ou si les méthodes élaborées sont voisines, le débat sur les méthodes peut perdre alors son enjeu initial, prévu par le maître. Les élèves n'ayant pas d'engagement personnel dans la justification de propositions, il n'y a plus matière à un débat argumentatif, mais plutôt à la formulation d'explications.

4 - Mais l'importance de l'argumentation dans les phases de validation se pose aussi dans les apprentissages géométriques au Cycle 3. Les constats empiriques basés sur l'évidence de la perception sont souvent trompeurs : des procédures fausses peuvent conduire à des productions satisfaisantes d'un point de vue perceptif et des procédures valides à des productions erronées selon ce même point de vue par manque de précision dans l'utilisation des instruments. Par exemple pour compléter le tracé d'un rectangle dont deux côtés sont donnés, certains élèves produisent des tracés apparemment exacts en utilisant simplement une règle, sans chercher à produire des angles droits tandis que d'autres peuvent aboutir à un résultat insatisfaisant, pour des raisons de qualité du tracé, tout en ayant explicitement recours à l'angle droit. Nos travaux actuels en géométrie nous ont conduits à distinguer la validation du produit de celle de la procédure, ce qui suppose souvent de différer la validation pratique, c'est à dire de ne la faire intervenir qu'après une phase d'argumentation portant sur les procédures.¹¹ Dans ce domaine aussi les critères de rationalité sont en construction au cycle 3.

4- Les tâches du maître dans les mises en commun

Les tâches du maître sont multiples et complexes ; il a de nombreux choix à effectuer.

Les choix du maître

Tout d'abord, il ne s'agit pas de faire une correction en présentant une solution type ou de privilégier la "meilleure solution". Dans "Les trois nombres qui se suivent", ceci n'aurait pas de sens car l'objectif est d'abord de développer des méthodologies de recherche personnelles (émettre des hypothèses, gérer des essais successifs, en organiser la trace écrite...). Une solution modèle ne pourrait amener qu'un désinvestissement des élèves les plus faibles qui ne verraient pas leurs démarches prises en compte et ne pourraient pas les faire évoluer pour les améliorer.

Par ailleurs, il ne s'agit pas d'exposer chaque production individuelle car les élèves se lasseraient d'une telle présentation qui comporterait des répétitions et ne permettrait pas

11 Ces différentes tâches sont prises en charge dans le cadre de la recherche INRP : "Rôle de l'argumentation dans les phases de validation en géométrie au cycle 3" qui a pour but de préciser sous quelles conditions les connaissances géométriques évoluent au moyen de débats argumentatifs dans le travail de validation mené avec différents environnements, en particulier ceux créés par des logiciels de géométrie dynamique comme Cabri.

la critique de chacune d'elles ; ceci pourrait aussi laisser croire que toutes se valent, ou empêcherait les élèves de reconnaître les caractéristiques intéressantes de procédures parfois très différentes les unes des autres.

Nous distinguerons les tâches en amont de la mise en commun, celles à effectuer en situation, pendant son déroulement, enfin celles à réaliser à l'issue de la mise en commun.

Tout d'abord, préalablement à la mise en commun, **le maître doit analyser l'ensemble des productions** pour en définir les principales catégories qui seront à traiter lors de la mise en commun. Par exemple pour la première phase de la situation "les trois nombres qui se suivent", l'enseignant doit repérer les productions correctes, inachevées, ou erronées, analyser les différentes méthodes... Dans certains cas, pour pouvoir analyser les productions le maître est conduit à différer la mise en commun jusqu'à une séance très proche.

Le maître doit fixer un objectif à la mise en commun. Comme nous l'avons vu dans la situation "les trois nombres qui se suivent", celui-ci est à la fois fonction de la nature du problème et de la diversité des productions des élèves. Souvent il est nécessaire de rendre explicite une procédure, un raisonnement, une connaissance, auxquels les élèves les plus faibles peuvent accéder.

Pour préparer la mise en commun, le maître doit aussi décider d'un certain nombre de paramètres qui vont influencer la nature des échanges : ainsi, il prévoit la forme et les supports de travail : travaux collectifs ou non, types d'écrits..., il détermine un ordre éventuel de traitement des productions : en particulier, dans le cas de productions individuelles, il en choisit quelques unes. Il doit veiller à ne pas laisser s'installer des habitudes dans l'ordre du traitement.

Le maître doit ensuite "gérer" la mise en commun. Nous entendons par là que le maître doit donner aux élèves la charge de la critique, laisser les élèves aller au bout de leurs échanges et de leur argumentation. Il doit par ailleurs garantir le bon déroulement des échanges, sur le plan social, parfois aussi sur le plan langagier : par exemple, faire reformuler si nécessaire, les propositions confuses ou difficiles à comprendre pour les autres.

Il appartient au maître de relancer, si nécessaire, certains élèves ; en particulier ceux dont les connaissances ou les capacités d'expression sont les moins assurées ainsi que ceux qui ont produit des résultats ou des méthodes erronées.

Les interventions du maître pendant la mise en commun s'avèrent particulièrement délicates, puisqu'il se trouve en quelque sorte dans une situation paradoxale ; il doit à la fois dévoluer véritablement aux élèves la prise en charge des échanges et de la critique, ne pas l'assumer à leur place, tout en restant le garant de l'essentiel : il est le garant de la vie de la classe, du temps et surtout du vrai. Il ne doit pas laisser transparaître son avis ou son jugement durant cette phase de validation, qui sinon deviendrait une phase de correction. Il est essentiel que les élèves comprennent que les demandes de reformulation exprimées par le maître ne signifient pas un jugement sur le contenu de qu'ils ont exprimé. Cela suppose aussi que le maître donne le temps aux élèves de formuler des critiques sur des propositions venant d'être énoncées.

Enfin, **le maître doit choisir une suite à la mise en commun.** Celle-ci, comme nous l'avons vu, conduit à des évolutions différentes, en fonction notamment de ce que les élèves avaient produit préalablement. La mise en commun de la première phase de la situation "les trois nombres qui se suivent" permet pour certains élèves, une amélioration

de leur propre méthode ou de leur formulation, pour d'autres une prise de conscience des erreurs, ou la compréhension d'une méthode plus pertinente ; enfin, pour quelques uns, il se peut que la mise en commun reste insuffisante pour garantir la compréhension d'une méthode plus efficace.

Le maître peut donc être amené à décider d'une phase de conclusion, ou d'une relance éventuelle de la recherche, ou du recours à une situation voisine destinée à tous, ou bien seulement à certains en effectuant des choix de différenciation.

Des difficultés éventuelles

Dans le cadre d'une recherche en cours¹² nous avons été amenés à préciser quelques hypothèses sur les causes éventuelles des difficultés rencontrées notamment par les maîtres débutants ; ces difficultés pouvant avoir comme effet de réduire l'activité mathématique des élèves pendant les mises en commun.

Les maîtres peuvent éprouver une appréhension ou des réticences face à la mise en place d'un débat:

- crainte de se laisser déborder (par les prises de paroles des élèves) ;
- risque d'être amené à aborder des questions mathématiques non prévues (doit-on y répondre ? quand et comment ?) ;
- crainte que les élèves retiennent des résultats ou méthodes erronés exposés ;
- méfiance par rapport aux débats pour éviter des critiques personnelles (confusion entre critique de l'argument et critique de la personne).

Il se peut aussi que les maîtres méconnaissent le rôle de la mise en commun : ils peuvent craindre d'y perdre du temps, ils peuvent sous-estimer le rôle des élèves dans ces phases (pourquoi faut-il qu'ils aient la charge de la preuve ? qu'est-ce que cela apporte ?), ils peuvent aussi sous-estimer le rôle des débats dans les apprentissages (en quoi les élèves peuvent-ils modifier des connaissances ou des représentations pendant les mises en commun ?)

La difficulté rencontrée peut aussi être liée à une méthodologie insuffisante du travail de préparation dans l'analyse préalable des productions et la sélection éventuelle de certaines d'entre elles ou dans le choix d'un objectif ...

Nous pensons également qu'il est difficile d'assurer une dévolution suffisante aux élèves de la charge de la critique : il y va de la capacité du maître à ne pas intervenir pour valider lui-même les propositions, à rester neutre tout en organisant les débats : distribution éventuelle de la parole, sollicitations ou relances de certains, reformulations, rappel des règles du débat.

Ils peuvent également avoir du mal à repérer les compétences mobilisables chez les élèves et les sources de leurs difficultés et à traiter les erreurs à bon escient.

Certaines décisions peuvent aussi sembler délicates à prendre : que faire en cas d'absence d'accord sur une proposition ou si l'accord se fait sur une proposition fautive : à

12 Recherche INRP/ADIREM : "Evaluation et développement de dispositifs d'enseignement en Mathématiques". Pour l'équipe de didactique des mathématiques à l'école élémentaire de l'INRP participent à cette recherche : Henri-Claude Argaud (IUFM de Grenoble, Centre de Valence), Jacques Douaire (IUFM de Versailles, Centre d'Antony Val de Bièvre), Marie-Paule Dussuc (IUFM de Lyon, Centre de Bourg-en-Bresse), Christiane Hubert (IUFM de Créteil, Centre de Livry-Gargan), Claude Rajain (IUFM de Reims, Centre de Châlons en Champagne), Gérard Yvroud (CPAIEIEN Grenoble).

la fin de la mise en commun, faut-il faire le choix d'une institutionnalisation ? faut-il conclure à tout prix...? quelles traces écrites laisser ? quelle évaluation faire ?

Même si les mises en commun restent délicates à mener y compris pour des maîtres chevronnés, il nous semble que certaines tâches liées à leur préparation ou à leur conduite sont plus difficiles que d'autres à maîtriser pour des professeurs des écoles débutants, et peuvent avoir comme effet de réduire l'activité mathématique des élèves.

Si les difficultés concernant l'appréhension des débats, la gestion des échanges et la préparation de la mise en commun paraissent pouvoir se résoudre avec l'expérience liée à l'exercice du métier, d'autres, relatives à la conception de l'activité de l'élève en mathématique, relèvent de choix d'un autre ordre, dont l'évolution implique une réflexion plus approfondie sur le sens de l'apprentissage mathématique. L'expérimentation citée précédemment, qui est en cours au CM, porte sur l'analyse des phases de mises en commun menées par des PE ayant quelques années d'exercices (dégagés des difficultés rencontrées lors de la première année portant, par exemple, sur la gestion du groupe). Elle s'appuie sur l'étude des échanges oraux, l'analyse de l'activité mathématique réelle des élèves, et des entretiens avec le maître relatifs à ces mises en commun.

Nous percevons que les difficultés rencontrées par des enseignants débutants peuvent ne provenir ni d'une analyse insuffisante de la situation ou des productions des élèves, ni d'une appréhension relative aux échanges ou à leur gestion, mais éventuellement d'une représentation insuffisante de la variété des mises en commun, de leurs finalités et des choix relatifs à leurs mises en œuvre.

En l'état actuel de nos recherches, il nous semblerait utile que les maîtres débutants puissent, au tout début de l'exercice du métier, analyser des descriptifs de mise en commun afin de mieux appréhender leur finalité, leur déroulement et leur diversité. De même l'observation et l'analyse de différentes mises en commun effectuées par eux-mêmes ou par d'autres collègues leur permettraient de découvrir les capacités des élèves pour argumenter en mathématique, la variété de mise en œuvre selon les organisations pédagogiques de chaque classe et l'effet des attitudes et des interventions du maître en situation sur l'activité mathématique de l'élève.