Les problèmes ouverts : des problèmes pour chercher

Donner un énoncé d'un problème ouvert aux élèves, c'est donner un énoncé dont on sait qu'il sera « créateur de mathématiques mais dont on ne sait pas à priori où l'imagination des élèves va mener » (Gilles Aldon).

1) <u>Qu'est-ce qu'un problème ouvert ?</u>

Comme le rappelle les programmes, la résolution de problèmes est au cœur de l'enseignement des mathématiques. De nombreux types de problèmes peuvent être utilisés au service de cet enseignement : les problèmes destinés à engager les élèves dans la construction de nouvelles connaissances (souvent appelés « **situations-problèmes** »), les problèmes **de réinvestissement** pour utiliser des connaissances déjà étudiées, les problèmes **de transfert** pour permettre aux élèves d'étendre le champ d'utilisation d'une notion déjà étudiée, les problèmes plus complexes ou encore **d'évaluation**.

Le terme "**problème ouvert**" a été introduit par une équipe de l'IREM de Lyon pour évoquer une catégorie de problèmes destinés à mettre en œuvre, avec les élèves, une démarche scientifique.

Ce sont des problèmes dont :
- l'énoncé est court.
- l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires ni de questions du type "montrer que"). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats ou dernières démarches présentés en cours.
- le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, peuvent-ils prendre facilement "possession" de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples.

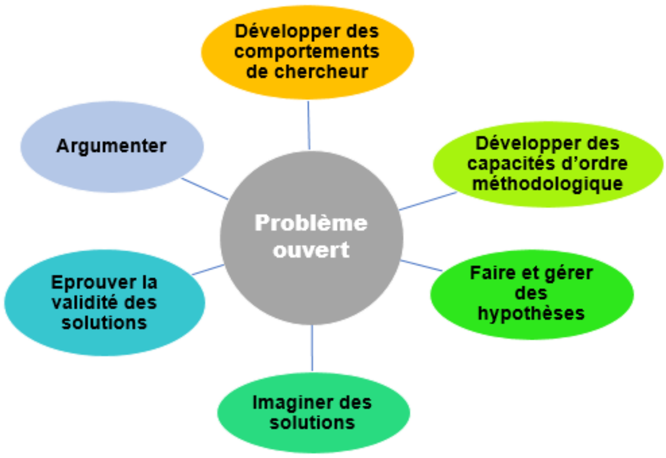
Ce sont des problèmes où la difficulté doit se situer non dans la compréhension de la situation, mais dans les moyens de répondre à la question posée, où la responsabilité de la solution appartient entièrement à l'élève

Exemple (emprunté à "Situations problèmes", APMEP, Elem-math IX) : *Quel est le plus grand produit de deux nombres que l'on peut faire en utilisant une fois et une seule les chiffres l, 2, 3, ... 9 pour former ces nombres?*

- **Objectifs d'apprentissage et enjeux**

Selon C. Choquet, les objectifs d'apprentissage des problèmes ouverts peuvent se décliner en 5 familles :
- réutiliser des savoirs antérieurs
- développer des savoirs métacognitifs (des connaissances sur les mathématiques)
- utiliser un raisonnement déductif
- vérifier son résultat
- « contribuer au développement de l'élève en tant que citoyen » : rédiger une explication, présenter une démarche à ses pairs…

La pratique du problème ouvert permet de proposer à l'élève une activité comparable à celle du mathématicien confronté à des problèmes qu'il n'a pas appris à résoudre (pour chercher une solution originale, personnelle). Cela permet aussi de mettre en œuvre des méthodes et compétences peu travaillées par ailleurs. Il offre une occasion de prendre en compte et même de valoriser les différences entre élèves. Il permet enfin à l'enseignant de faire connaître aux élèves quelles sont ses attentes en matière de résolution de problèmes (il s'agit de chercher plutôt que de trouver rapidement, faire preuve d'initiative et d'originalité).



Gil Gaune, Nathalie Roussel, Cécile Xercavins
Référents Mathématiques de Circonscription, département du Rhône

- **Le problème ouvert comme fil rouge de son enseignement**

Pour Gilles Aldon, il s'agit plus d'organiser son année en choisissant des problèmes suffisamment riches plutôt que des chapitres. Le problème peut constituer un réel fil rouge sur le long terme pour structurer l'enseignement. Il en fait une illustration avec « le problème qui déchire » qui peut se décliner de l'école primaire à l'université avec les nombreuses notions mathématiques qu'il peut mettre en jeu (diviseurs, multiples, division euclidienne, …), avec les nombreux allers-retours entre expériences et théorie et enfin avec les calculs nombreux (mentaux, posés, réfléchis) qu'il peut engendrer.

https://clarolineconnect.univ-lyon1.fr/icap_website/1324/40942
https://clarolineconnect.univ-lyon1.fr/icap_website/view/1324

2. L'importance des stratégies de résolution

- **Les Différents modes de raisonnement**

Le raisonnement, comme le définit Ermel 1999, est une suite organisée d'inférences conduisant à une conclusion ; l'inférence consistant en la production d'informations nouvelles à partir d'informations déjà là et de connaissances avérées en mémoire. Il s'agit là d'un point de vue cognitif.

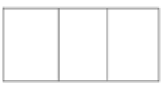
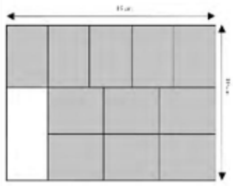
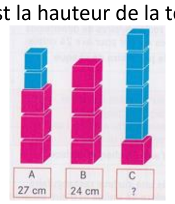
Weil-Barais (Weil-Barais1993) recense plusieurs formes de raisonnement.

- Les raisonnements non canoniques (ils ne suivent pas des règles bien définies) :
  - le raisonnement par analogie (une conclusion est tirée par ressemblance),
  - le raisonnement en contexte (une sorte de reconnaissance de forme qu'appliqueraient les experts)
  - le raisonnement par induction où une loi générale est tirée de l'examen de cas particuliers.
- Les raisonnements canoniques :
  - le raisonnement déductif directement associé aux mathématiques
  - le raisonnement expérimental, avec ses trois aspects : énoncé des hypothèses, recherche d'informations pour mettre à l'épreuve les hypothèses, traitement des informations.

Ces deux types de raisonnement peuvent être légitimement travaillés par les élèves d'école primaire.

Le problème ouvert permet de mettre en œuvre une dimension expérimentale. Il y a en effet une réelle congruence entre la démarche associée à la résolution de problèmes ouverts et la démarche scientifique (faire des essais, conjecturer, tester, prouver).

La résolution de problèmes ouverts est une occasion de rencontrer des modes de raisonnement différents. R. Charnay les décline de la façon suivante :

Par essais et ajustements	**Par l'étude exhaustive des cas (toutes les possibilités)**	**Par recours à la déduction (stratégie hypothético-déductive)**	**Par stratégie « montante et descendante» (induction et déduction)**
La tirelire Dans ma tirelire, j'ai 32 pièces et billets. Je n'ai que des pièces de 2 € et des billets de 5 €. Avec ces 32 pièces et billets, j'ai 97 €. Combien y a-t-il de pièces de 2 € et de billets de 5 €dans ma tirelire ? Groupe Ermel CM2	**Le drapeau** Trouve tous les drapeaux possibles que tu peux faire avec trois couleurs: jaune, bleu, vert. 	**Les étiquettes** Voici 11 étiquettes qui ont été tracées sur une plaque de carton de dimensions 10 cm et 15 cm. Chaque étiquette a les mêmes dimensions. Calcule les dimensions réelles d'une étiquette 	Juju a réalisé des tours avec des cubes bleus et des cubes roses. Les cubes roses sont plus gros que les cubes bleus. Voici les trois tours qu'il a réalisées et les hauteurs des tours A et B. Quelle est la hauteur de la tour C ? 
Il nécessite, pour l'élève, de savoir prendre en compte l'information apportée par les essais successifs pour engager un nouvel essai. Une procédure par essais systématiques est également possible, par exemple en faisant évoluer le nombre de pièces de 2 € de un en un.	Ce type de problème demande une organisation pour obtenir une exhaustivité des solutions .=> colorier la première case en bleu puis trouver les possibilités pour la deuxième et troisième case .=> colorier la première case en jaune puis trouver les possibilités pour la deuxième et troisième case.=> etc ...	Pour résoudre ce type de problème, il faut faire appel à un raisonnement déductif et à une organisation des étapes du raisonnement.=> Il faut d'abord déterminer la largeur d'une étiquette (à partir de l'information 15 cm qui correspond à cinq largeurs »), puis en déduire sa longueur (à partir de l'information 10 cm qui correspond à « deux largeurs et une longueur »).	Pour résoudre ce type de problème, il faut déduire des réponses de ce qui est connu : Hauteur des cubes roses : 6 cm

Gil Gaune, Nathalie Roussel, Cécile Xercavins
Référents Mathématiques de Circonscription, département du Rhône