FAIRE DE LA GÉOMÉTRIE AU CYCLE 3 À PARTIR D'UNE CORDE À 13 NŒUDS

Mirène LARGUIER
Maître de conférences, IUFM DE Montpellier
Laboratoire LIRDEF
miren.larguier@gmail.com

Brigitte BONNET-PHILIP
Conseillère pédagogique, circonscription de Montpellier ouest
brigitte.bonnet-philip@ac-montpellier.fr

Résumé

La corde à 13 nœuds est un outil qui a perduré jusqu'au moyen-âge et dont les multiples usages permettent de faire rencontrer aux élèves des notions comme l'alignement, l'orthogonalité, le parallélisme, les polygones, mais aussi des notions du domaine des grandeurs et mesures comme longueur, périmètre et aire.

Les questions posées a priori aux participants de l'atelier sans leur dévoiler les possibilités de l'outil « corde à treize nœuds » sont les suivantes :

- le point de départ de l'enseignement de la géométrie en cycle 3 étant la corde à 13 nœuds, quelles notions peuvent être abordées dans le méso puis le micro espace ?

- quelles progressions mettre en place pour élaborer des séquences d'enseignement en lien avec les notions précédentes ?

Le groupe premier degré de l'IREM de Montpellier expérimente depuis l'année scolaire 2011- 2012 des séquences d'enseignement ayant pour point de départ la découverte de la corde à13 nœuds. Lors de l'atelier, les séquences élaborées seront proposées aux participants pour qu'elles soient analysées.

I - L'INTÉRÊT DU GROUPE IREM POUR LA CORDE À 13 NŒUDS

Le groupe premier degré de l'IREM de Montpellier est à l'origine du travail que nous allons présenter. Ce groupe est constitué depuis une quinzaine d'années par douze professeurs des écoles titulaires dont certains sont maîtres formateurs et il est piloté par un enseignant chercheur de l'IUFM de Montpellier, actuellement Mirène Larguier, et un conseiller pédagogique représentant la direction académique, actuellement Brigitte Bonnet-Philip. Le travail de ce groupe est inscrit au plan de formation du premier degré, les enseignants sont donc remplacés par des titulaires de la brigade départementale. La durée du stage de 6 jours jusqu'en 2012, a été réduite pour l'année 2012-2013 à 4 jours pour des raisons budgétaires. Le groupe élabore des séquences de classe, les expérimente et diffuse des ressources pour les enseignants.

Nous avons été intéressés par le potentiel d'un outil utilisé pendant des siècles qui semblait a priori permettre l'enseignement de nombreuses notions du programme de mathématiques dans des classes de cycle 2 et de cycle 3. Cet outil était utilisé en Égypte 2000 ans avant Jésus Christ, il était également l'un des outils essentiels des bâtisseurs du Moyen Âge. À Guédelon[1], en France, ces anciennes techniques moyenâgeuses sont reprises actuellement pour construire un château, la corde à 13 nœuds figure parmi ces outils.

---

[1] www.**guedelon**.fr

Voir aussi : http://matoumatheux.ac-rennes.fr/accueil.htm

http://education.francetv.fr/videos/111097-envoyer-ami-v111097

Le fait de pouvoir relier des contenus mathématiques figurant dans le savoir à enseigner à des aspects historiques a augmenté notre motivation pour nous lancer dans l'exploitation de cet outil traditionnel mais nouveau pour les élèves comme pour les professeurs. Cependant l'aspect historique a été un élément moteur pour les enseignants curieux de savoir comment utiliser cet outil mais n'a pas été exploité avec les élèves. Un développement de cette dimension historique reste une piste intéressante à explorer en classe. Des séquences ont ainsi été élaborées et expérimentées en cycle 2 et en cycle 3 entre septembre 2011 et juin 2013, du CP au CM2. Dans cet atelier, nous nous limitons à la séquence pour le cycle 3, cependant de nombreux éléments peuvent être repris en cycle 2.

II - DES APPUIS THÉORIQUES POUR FONDER CE TRAVAIL

1 Étude de l'espace et de la géométrie

L'usage d'une véritable corde à 13 nœuds situe d'emblée les tâches données aux élèves dans le monde réel, ce qui pose des problèmes spatiaux qui vont être modélisés dans le domaine mathématique de la géométrie. Nous différencions ainsi les problèmes spatiaux et les problèmes géométriques dans une acception précisée ainsi par Guy Brousseau (2000) :

> Il est assez commun de justifier l'enseignement de la géométrie par le fait qu'elle est la science de l'espace, le décor essentiel de toutes nos actions et la matrice de toutes nos conceptions. […] La géométrie peut être définie comme la collection des connaissances spécifiques du **contrôle de la consistance des énoncés sur l'espace**.

Cette disjonction nous apparait essentielle pour le travail mené à partir d'un objet réel qui va être manipulé pour évoquer des objets idéaux qui seront définis géométriquement. Brousseau (ibid) définit trois fonctions de la géométrie :

- science de l'espace ;
- moyen pour représenter et modéliser l'espace ;
- modèle de l'activité mathématique en tant qu'initiation à une théorie mathématique.

Dans le contexte de cet atelier, nous ne retenons que les deux premières fonctions qui nécessitent déjà, pour un élève de l'école primaire, un travail d'abstraction important. Ce processus est nécessaire pour comprendre quels seront les véritables objets au sujet desquels s'élaboreront, au collège, des démonstrations en géométrie.

Nous reprenons la définition donnée par Guy Brousseau (2000) relative aux trois espaces : macro-espace, méso-espace et micro-espace pour ne garder dans ce contexte que le méso-espace et le micro-espace. Brousseau (ibid) souligne que ces trois dimensions impliquent des conceptions de l'espace et des milieux spatiaux différents. Une variable importante du milieu objectif est relative au matériel manipulé. Dans le méso-espace, ou espace qui peut être embrassé par un sujet par un regard circulaire, il s'agit d'une corde similaire à celle utilisée historiquement d'une longueur d'environ 6m. Dans le micro-espace, espace constitué par l'environnement proche d'un sujet qui peut être vu et touché sans avoir à se déplacer, cette grande corde est remplacée par deux outils différents :

- une cordelette fermée d'une longueur d'environs 20 cm ;
- une corde-paille fermée constituée par 12 pailles de même longueur dans lesquelles passe une ficelle.

Par ailleurs dans ce dernier espace, les élèves disposent également des instruments usuels de géométrie.

2 L'influence du milieu objectif sur les apprentissages des élèves

Nous empruntons à Perrin-Glorian et al. (2006) la question suivante :

> Quelle articulation entre l'usage des instruments de géométrie et le développement de connaissances géométriques incorporés dans des schèmes d'action ?

Si cette question a été étudiée pour des instruments usuels, nous la transposons dans le cadre de ce travail pour la grande corde, la cordelette et la corde-paille. Il est intéressant de se poser la question à priori du potentiel mathématique porté par ces instruments, ce qui revient à poser la question des conceptions sous-jacentes en lien avec des milieux et des espaces différents. Par ailleurs, nous partageons l'hypothèse des auteurs (ibid) :

> Pour notre part, nous faisons l'hypothèse que les concepts géométriques, le vocabulaire, la maîtrise des instruments s'acquièrent et s'évaluent dans des activités qui les mettent en jeu simultanément et en imbrication avec des connaissances liées à la reconnaissance des propriétés visuelles des figures.

3 Les paradigmes de la géométrie

Houdement et Kuzniak (2006), définissent trois paradigmes géométriques relativement à trois dimensions jouant des rôles différents pour le statut de la preuve : l'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif. Le travail que nous proposons s'inscrit dans la Géométrie I ou « géométrie naturelle » :

> La Géométrie I a pour source de validation la réalité, le sensible. Le qualificatif de « naturelle » que nous lui avons attribué à la suite de Gonseth veut refléter l'existence d'une relation au réel, mais en aucun cas il ne comporte de référence à l'idée de nature opposée à celle de culture. La Géométrie I correspond déjà à un effort d'abstraction du réel, dans la mesure où la pensée sélectionne pour s'exercer certains aspects des objets s'ils sont matériels ou les traduit en schémas.

Ainsi les élèves vont être amenés à sélectionner certains éléments de la corde à 13 nœuds et à en négliger d'autres comme la nature de la corde ou sa grosseur. Ils vont être amenés également à conserver la mémoire des réalisations avec la grande corde à travers des schémas où ne devront figurer que les éléments suffisants et nécessaires pour pouvoir retrouver une réalisation avec la corde d'après un schéma. Cette relation entre le méso-espace avec la grande corde et le micro-espace avec le schéma, est un fondement pour élaborer les objets de la géométrie qui seront ceux de la géométrie II dite « géométrie axiomatique naturelle » pour laquelle :

> La relation avec la réalité subsiste encore dans cette Géométrie, dans la mesure où elle s'est constituée pour organiser les connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux.
>
> L'axiomatisation proposée est certes une formalisation, mais elle n'est pas formelle car ici la syntaxe n'est pas coupée de la sémantique qui renvoie à la réalité. D'où la conservation du qualificatif de « naturelle ». (Houdement et Kuzniak, 2006)

Nous reviendrons plus loin sur cette dimension sémantique dont l'évolution rend compte de la dynamique de modélisation qui s'amorce dans l'espace et permet l'entrée dans la géométrie.

4 Distinction dessin/figure/pré-figure

Nous reprenons la distinction depuis longtemps retenue dans des recherches en didactique des mathématiques entre dessin et figure (Parzysz, 1988). Le dessin est un objet du monde réel qui est une représentation sémiotique dans le registre graphique au sens de Raymond Duval[2] (1993). Ce dessin représente soit un objet du monde réel, il représente la corde par exemple, soit un objet idéal de la géométrie. C'est cet objet théorique des mathématiques du domaine de la géométrie que nous appelons alors figure. La figure s'inscrit ainsi dans la théorie avec une dénomination, une définition, des propriétés, etc. Dès l'antiquité, cette distinction est apparue[3] et elle est fondamentale pour établir la première théorie axiomatique des mathématiques, préfiguration de la Géométrie II.

[2] Duval lui-même ne fait pas la distinction entre les termes de dessin et de figure et parle notamment des appréhensions des figures (1997) là où d'autres auteurs parleraient d'appréhensions des dessins. .

[3] Platon mettait en garde pour ne pas confondre un objet et son reflet dans l'eau, il s'agit donc de ne pas confondre l'objet et l'une de ses représentations.

Nous avons éprouvé le besoin, pour cet atelier, d'un terme spécifique pour désigner les formes réalisées avec la corde. Nous utilisons le terme de pré-figure. Ainsi, avec la grande corde, les élèves peuvent réaliser la pré-figure d'un losange puis en faire le dessin. Cela permettra dans le meso-espace, de réunir tous les dessins correspondant à un quadrilatère dont tous les côtés ont la même longueur, soit 3 fois la distance entre deux nœuds consécutifs. Tous ces dessins correspondent à une figure appelée losange définie par le fait d'être un quadrilatère ayant quatre côtés de la même longueur.

5 Analyse du discours et des formulations

Le passage du monde réel au cadre géométrique s'accompagne d'une transformation conceptuelle qui va de pair avec une évolution du langage dans un processus de *secondarisation des genres* (Rebière, 2002, 2013). Ainsi dans un premier temps, la situation dans le méso-espace utilisant la grande corde suscitera vraisemblablement un langage renvoyant au milieu matériel objectif : corde, nœud, intervalle, écart, tenir un nœud avec une main, tendre la corde entre le premier nœud et le quatrième nœud, etc. Le passage au dessin pour garder la mémoire de la pré-figure devrait faire évoluer ce discours vers les formulations suivantes : pointe, point, sommet, trait droit, côté, forme, triangle, quadrilatère, rectangle, etc. Une dernière étape du processus sera de parvenir à dégager et institutionnaliser un objet géométrique dont les caractéristiques appartiennent au cadre géométrique avec les termes spécifiques : point, sommet, segment, côté, milieu, triangle, quadrilatère, longueur, etc… Cette transformation conceptuelle et langagière s'inscrit dans une première phase d'un processus de modélisation, ce qui reprend l'une des fonctions de la géométrie soulignée par Brousseau.

6 Synthèse des soubassements théoriques

Le tableau de la figure 1 met en parallèle les différentes références théoriques et montre l'évolution du début de la séquence dans le méso-espace avec la grande corde jusqu'au micro-espace où implicitement ce sont les figures de la géométrie GII qui sont appréhendées. C'est le collège qui rendra explicite ce concept en acte de figure géométrique qui est à différencier du dessin qui la représente.

Nature de l'espace	Méso-espace	Micro-espace	Micro-espace	Micro-espace
Les objets du milieu	Objets réels : corde à 13 nœuds	Objets réels : cordelette et corde-paille	Représentations sémiotiques dans le registre des dessins : dessins comme mémoire des réalisations avec les 3 types de cordes	Figure géométrique : de façon implicite le dessin est une représentation de la figure comme objet idéal de la géométrie
Type d'activité	Expérimentation	Expérimentation	Première étape de la modélisation	Modélisation
Type de géométrie	GI	GI	GI	GII
Langage	Décrit les objets réels	Décrit les objets réels	Décrit les objets réels et intègre des éléments langagiers géométriques	Langage spécifique de la géométrie

Tableau 1 : synthèse des éléments théoriques

III - LA SÉQUENCE EN CYCLE 3 ÉLABORÉE PAR LE GROUPE IREM

1 Les programmes dans lesquels s'inscrivent les séances

Nous donnons ci-dessous des extraits des programmes de 2008 en vigueur au moment de l'atelier concernant le domaine géométrique à enseigner au cycle 3 (BO n°3 du 19 juin 2008).

Géométrie

Utiliser en situation le vocabulaire géométrique : points alignés, droite, droites perpendiculaires, droites parallèles, segment, milieu, angle, axe de symétrie, centre d'un cercle, rayon, diamètre.

Percevoir et reconnaître parallèles et perpendiculaires

Vérifier la nature d'une figure plane simple en ayant recours aux instruments

Décrire une figure en vue de l'identifier parmi d'autres figures ou de la faire reproduire.

Grandeurs et mesures

Utiliser des instruments pour mesurer des longueurs…

Vérifier qu'un angle est droit en utilisant l'équerre ou un gabarit

2 La séquence du cycle 3 et le descriptif des séances proposées

Nous présentons tout d'abord globalement la structure de la séquence élaborée pour le cycle 3 et testée dans des classes. Nous détaillerons ensuite les différentes séances.

NUMÉRO DE SÉANCE	TITRE	OBJECTIFS SPÉCIFIQUES
1 dans le meso-espace	Découverte de l'outil corde à 13 nœuds	Décrire la corde, repérer ses caractéristiques (nombre de nœuds, intervalle entre 2 nœuds successifs) et préciser les termes de la description. Rechercher des formes géométriques (les pré-figures).
2 dans le meso et le micro-espace	Corde à 13 nœuds et dessins des pré-figures	Tracer des dessins représentant les pré-figures obtenues avec la corde. Établir un répertoire des dessins avec des lignes ouvertes ou fermées.
3 dans le micro-espace	Avec les cordelettes	Construire des pré-figures avec les cordelettes à partir de photos prises en séance 2.
4 dans le micro-espace	Avec les cordes-pailles	Écrire des programmes de construction. Construire des figures de dimensions données.

Tableau 2 : description globale de la séquence corde à 13 nœuds

2.1 Séance 1 : découverte de l'outil corde à treize nœuds

Étape 1 : Dans le méso-espace, dans la cour ou dans un gymnase, répartir les élèves en 3 ou 4 groupes, chaque groupe dispose d'une corde à 13 nœuds de 6m de long.

Laisser un temps d'observation aux élèves puis recueillir les commentaires, faire décrire l'outil proposé.

On attend le nombre de nœuds, la notion d'intervalle ou d'écart entre deux nœuds consécutifs, l'observation de la régularité des positions des nœuds et de la longueur des intervalles. On attend aussi quelques propositions d'utilisation éventuellement non mathématiques : jouer, sauter …

Étape 2 : Préciser le cadre disciplinaire mathématique de l'activité à venir et demander aux élèves comment on pourrait utiliser cette corde pour faire de la géométrie.

Matériel mis à disposition : crayon, craie, ardoise, appareil photo…

Dans les groupes, les rôles sont répartis entre les élèves : acteurs ou observateurs.

Les acteurs doivent tester ce qu'ils ont imaginé, les observateurs doivent garder la mémoire des différentes positions de la corde.

Inverser les rôles après quelques minutes.

Étape 3 : Réaliser une affiche collective rendant compte des productions des élèves dans les différents groupes.

Étape 4 : Débattre à partir de l'affiche pour repérer les éléments nécessaires à la représentation ainsi que leurs dénominations.

Figure 1 : séance 1 étape 2

Cette première séance permet d'installer le milieu matériel dans l'espace réel vécu, de définir le cadre de travail, celui de la géométrie, et d'enrichir le milieu de termes partagés dans la classe pour décrire la corde, expliciter les façons de la tenir pour créer des pré-figures. Par ailleurs, une première évolution d'un problème de l'espace vers un problème de géométrie est amorcée en mobilisant la géométrie comme « science de l'espace » (Brousseau, 2000).

2.2 Séance 2 : corde à 13 nœuds et dessins des pré-figures

Étape 1 : Rappel de la séance précédente et reprise des affiches.

Étape 2 : Mise en situation

On dispose de 3 ou 4 cordes, la classe est séparée en 3 ou 4 groupes afin de favoriser la manipulation.

Comme à la séance précédente, les élèves vont jouer successivement deux rôles distincts au sein des groupes : acteurs (3 élèves par corde et un traceur) ou observateurs (les autres membres du groupe).

Mettre à disposition du matériel : papier, crayon, craie, ardoise, appareil photo…

Consigne :

« Réalisez toutes les formes géométriques possibles ***corde tendue et fermée en tenant un seul nœud d'une main.*** *Dans chaque groupe, testez ce que vous avez imaginé. Les observateurs doivent garder la mémoire des différentes positions de la corde. »*

La corde est posée sur le sol pour que le traceur puisse matérialiser la forme produite.

Laisser les élèves agir avec la corde puis inverser les rôles.

Reprendre la même consigne avec :

- 4 élèves par corde et un traceur ;

- 5 élèves par corde et un traceur.

Étape 3 : Retour en classe, observer les réalisations et trier les figures. Expliciter les critères de tri.

Dans la figure 2 nous donnons quelques exemples des dessins obtenus à la deuxième étape.

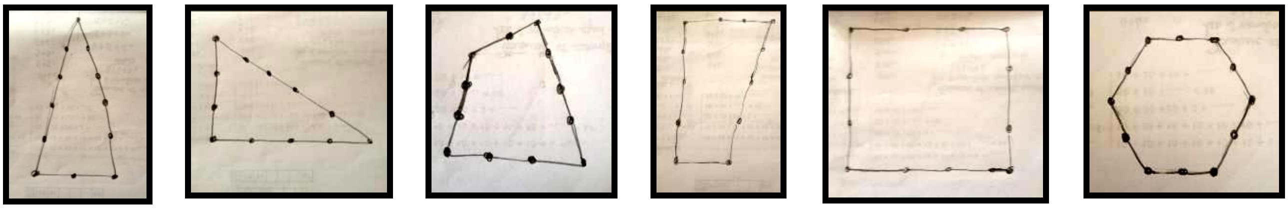


Figure 2 : exemples de dessins produits en séance 2

La séance 2 sollicite la géométrie comme « moyen pour représenter et modéliser l'espace ». Le potentiel géométrique de l'objet réel « corde à treize nœuds » est mis au jour dans la phase où les élèves ont à dessiner les pré-figures obtenues. Lors de la troisième étape, l'analyse de l'affiche collective amène les élèves à classer les dessins en triangles, quadrilatères, etc… en mobilisant des connaissances géométriques qui s'expriment par le langage spécifique de la géométrie. Des termes comme côté et sommet viennent alors remplacer les termes comme intervalle et nœud qui décrivent l'objet réel « corde » dans un processus de secondarisation des genres (Rebière, 2002, 2013).

2.3 Séance 3 : avec les cordelettes

Matériel : Cordelettes à 13 nœuds individuelles préalablement construites par les élèves ou par le professeur (Cf. annexe 1).
Photos prises lors de la séance 2 imprimées et plastifiées.
Un support pour 2 élèves pour fixer les cordelettes : un couvercle en carton de ramette de papier A4 ou une boîte à pizza, par exemple. Clous ou punaises à tableau. Feuille A4 et outils de traçage.

Figure 3 : le matériel de la séance 3

Étape 1 : Reprise collective de la séance précédente et de l'utilisation du vocabulaire spécifique lié aux productions des élèves.

Étape 2 : Consigne : « *Par groupes de 3, avec la cordelette à 13 nœuds, reproduisez à partir des photos quelques figures réalisées dans la cour.* »

Étape 3 : La cordelette est fixée, avec des petits clous, par ses «nœuds sommets » sur un support en carton recouvert de 2 feuilles A4 superposées.

Consigne : « *Tracez les figures (ou quelques figures) sur le papier.* »

Étape 4 : Faire énoncer par les élèves la technique utilisée pour les tracés.

Les procédés reprennent ceux utilisés dans la cour (comme le suivi de la corde avec le crayon, c'est la technique 1). Il est possible que certains aient simplement relié les sommets matérialisés par les trous laissés par les clous (c'est la technique 2).

Étape 5 : Si la technique 2 n'émerge pas, travailler avec la deuxième feuille où n'apparaissent que les trous correspondant aux sommets.

Demander de reproduire la figure, avec les outils de traçage et laisser les élèves chercher d'autres figures.

Étape 6 : Mise en commun de toutes les figures obtenues

2.4 Séance 4 : avec les cordes-pailles

Dans cette séance, apparaît la nécessité de mettre au point une dénomination pour identifier les différents polygones obtenus en laissant cette responsabilité aux élèves, dans un premier temps. Nous proposons une notation possible, mais elle n'est pas unique. Nous notons par exemple 2-4-1-5 un quadrilatère ABCD constitué par les longueurs suivantes :

AB = 2u   BC = 4u   CD = u   DA = 5u

u étant l'unité de longueur qui corresponde à la longueur entre 2 nœuds consécutifs sur la corde tendue.

Des problèmes peuvent alors être posés :

- est-ce que les pré-figures obtenues avec les codages 1-5-2-4 et 4-5-1-2 sont les mêmes qu'avec le codage 2-4-1-5 ?
- est-ce que toute somme égale à 12 d'au moins 3 nombres permet de déterminer un polygone ?

Matériel : Affiche réalisée à l'issue de la séance 3.

Cordes-pailles avec alternance de 2 couleurs au moins.

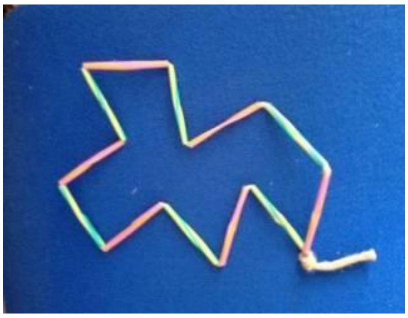


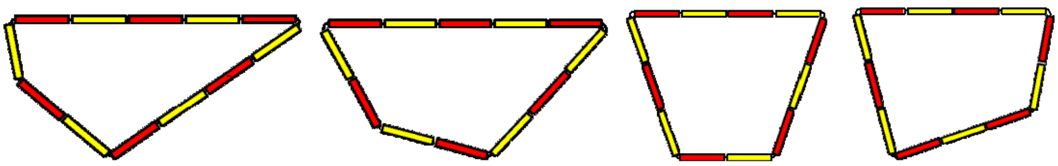
Figure 4 : corde-paille bicolore

Étape 1 : Distribuer un nouvel outil, la corde-paille et demander aux élèves de reconstruire avec cette corde-paille quelques figures de l'affiche.

Étape 2 : Représenter sur une feuille les différentes figures réalisées avec les pailles et faire apparaître les couleurs.

Étape 3 : Qui suis-je ?

Première phase : Afficher au tableau les dessins des quadrilatères ci-dessous :



Un élève choisit dans sa tête une figure, les autres doivent la découvrir en posant des questions auxquelles l'élève répondra uniquement par oui ou non.

Deuxième phase : Répertorier les informations utilisées pour identifier la figure avant de proposer le codage. Exemple : le codage du premier dessin est 5-4-2-1.

Troisième phase : refaire le jeu du « qui suis-je » avec l'utilisation de ce codage.

Étape 4 : Institutionnalisation. Une affiche est réalisée avec les différentes sortes de triangles.

Étape 5 : Faire réaliser aux élèves un répertoire de tous les polygones en indiquant le codage associé.

Prolongements:

Rechercher avec la corde-paille tous les triangles possibles que l'on peut former et écrire leur codage.

Faire l'inventaire des propositions.

Nommer ces triangles et leurs propriétés : 2-5-5 isocèle ; 3-4-5 rectangle ; 4-4-4 équilatéral.

Faire rechercher toutes les propriétés des quadrilatères (parallélisme, symétrie axiale, angles droits, etc.)

IV - QUESTIONS DE L'ATELIER ET ÉLÉMENTS DE RÉPONSE

Avant la présentation des séances menées par les enseignants du groupe IREM de Montpellier, les participants de l'atelier ont cherché, par groupes, les usages didactiques de la corde à 13 nœuds en cycle 3 en lien avec les programmes officiels dans le méso et le micro espace. Ils ont élaboré un scénario de séquence utilisant ce matériel en commençant dans le méso espace et en poursuivant dans le micro espace, et ont précisé les objets et les concepts travaillés dans les différentes séances. Nous présentons de façon synthétique des propositions des participants à l'issue de cette recherche en groupes.

Dans le méso espace

- Travailler avec les cordes entières ou pas.
- Réaliser des cercles concentriques.
- Vérifier l'orthogonalité de 2 plans.
- Placer un élève à un endroit en tenant un nœud, c'est le 1er sommet d'un carré, demander à d'autres élèves de se positionner pour obtenir le carré.

Dans le micro espace avec les cordelettes

- Tracer un cercle de rayon donné (ex : le rayon fait 2 espaces ou comprend « 3 nœuds »).
- Tracer deux diamètres perpendiculaires (utiliser la corde en « 3-4-5 ») et relier les sommets. Qu'obtient-on ? Reprendre cette activité avec les instruments usuels.
- Situation des triangles :
    - Construire un triangle avec une cordelette.
    - Écrire un message pour le faire construire par d'autres élèves.
    - Réaliser une trace (dessin) du triangle.
    - Rechercher d'autres triangles. La recherche est exhaustive et permet le repérage de triangles impossibles. Une difficulté avec le triangle 2-4-6 qui est possible à réaliser dans le réel mais qui n'existe pas dans la géométrie plane (sauf à être un triangle aplati, ce qui est difficile à concevoir en cycle 3).
- Avec les cordes-pailles : donner un dessin réalisé à l'échelle 1 (1 dessin différent par groupe), sans faire apparaître « les morceaux de paille », c'est à dire sans faire apparaître les détails du tracé. Faire rechercher le périmètre des figures en unités paille, montrer

qu'elles ont le même périmètre mais qu'elles sont de formes différentes. Un prolongement est possible avec un travail similaire relatif aux aires.

Des remarques intéressantes issues des débats de l'atelier

- Un nœud est à égale distance des 2 autres les plus proches.
- La comparaison d'une corde avec douze espacements réguliers et une corde avec 12 espacements irréguliers permet de souligner l'importance des espacements réguliers.
- Avec les cordes-pailles : les pailles mises bout à bout, formant une ligne droite, matérialisent un côté de la figure, le point de contact entre deux pailles ne formant pas une ligne droite peut devenir un sommet.

V - EN SYNTHÈSE

1 Potentiel de la grande corde à 13 nœuds

La corde n'est au départ, lorsqu'elle est présentée aux élèves, qu'un artefact (Rabardel, 1995) qui peut se transformer en corde à sauter par exemple. C'est donc dans un processus de genèse instrumentale qu'elle va devenir un instrument pour la discipline des mathématiques en lien avec des schèmes d'utilisation. Rabardel (Ibid) précise que :

> Un instrument est donc formé de deux composantes :
>
> – d'une part, un artefact, matériel ou symbolique, produit par le sujet ou par d'autres ;
>
> – d'autre part, un ou des schèmes d'utilisation associés, résultant d'une construction propre du sujet, autonome ou résultant d'une appropriation de schèmes sociaux d'utilisation (SSU).

Cet instrument va permettre de travailler les concepts suivants avec l'élaboration de schèmes d'utilisation spécifiques :

- dans le domaine de la géométrie : figure plane, figure dans l'espace, alignement, segment, droite, cercle, orthogonalité, parallélisme, polygones, symétrie, milieu ;
- dans le domaine des grandeurs et mesures : longueur, périmètre, aire, existence d'un polygone de dimensions données (inégalité triangulaire) ;
- dans le domaine numérique : décomposition additive du nombre 12, comparaison de nombres.

Le travail sur le cercle proposé par plusieurs participants à l'atelier n'a pas été exploré dans la séquence élaborée par le groupe IREM de Montpellier. C'est bien évidemment une piste intéressante à explorer. De même le domaine numérique n'a pas été abordé. Le potentiel de la corde à treize nœuds n'a donc pas été totalement pris en compte.

Dans le cadre de la géométrie, l'introduction de la corde à 13 nœuds dans le milieu matériel de la situation d'action, mobilise les connaissances suivantes en tant que concepts en actes ou théorèmes en acte (Vergnaud, 1990), préparant l'avènement de connaissances du domaine de la géométrie et du domaine des grandeurs géométriques :

- Concepts en acte :
  - distinction entre figure plane et dans l'espace ;
  - concept de polygone, côté, sommet, figure concave ou convexe ;
  - définition d'un polygone par le nombre de ses sommets ou bien par la longueur de ses côtés ;
  - périmètre de la pré-figure égal à 12 unités, l'unité étant la distance entre 2 nœuds consécutifs lorsque la corde est droite ;
  - distinction entre pré-figures indéformables (comme 3-4-5) ou bien déformables (comme 3-3-3-3) ce qui permet l'image mentale d'une pré-figure dynamique qui

objective la différence entre le dessin et la figure (il existe un losange de côté 3 unités et il existe une infinité de dessins différents de ce losange).

- Théorèmes en acte :
  - impossibilité de construire certains triangles comme 7-3-2 ;
  - il est possible de trouver différents polygones de même périmètre et d'aires différentes ;
  - il existe différents polygones de même périmètre et de formes différentes.
- Dans le méso-espace, la corde à 13 nœuds sert d'instrument de vérification et de tracé, et nous retrouvons là son usage en tant qu'outil des bâtisseurs utilisé jusqu'au moyen âge :
  - tracer des dessins géométriques à partir des pré-figures ;
  - réaliser des traits droits ;
  - réaliser ou vérifier un alignement ;
  - comparer des longueurs ou réaliser une longueur multiple d'une autre ;
  - réaliser ou vérifier l'orthogonalité ;
  - réaliser ou vérifier un parallélisme.

Concernant le travail relatif au parallélisme, nous avons remarqué qu'il est peu fréquent dans les classes observées alors que la réalisation de la pré-figure d'un parallélogramme comme 2-4-2-4 donne une forme déformable tout à fait pertinente pour réaliser ou vérifier le parallélisme. L'image mentale d'un parallélogramme « dynamique » est une conception intéressante qui porte en germe une définition du parallélogramme.

2 Potentiels comparés des différentes cordes

Le travail avec la grande corde et avec la cordelette permettent de changer d'espace, du méso au micro. Ce changement d'espace favorise le basculement vers la modélisation géométrique. Ce sont essentiellement les nœuds qui sont retenus comme éléments essentiels pour décrire les pré-figures. La modélisation géométrique d'un nœud est alors un point en tant que sommet d'un polygone. Les figures obtenues sont donc plutôt pensées en dimension zéro (Duval et Godin, 2005). La corde-paille, en revanche, introduit un changement conceptuel important. Les éléments caractéristiques essentiels à retenir pour la corde-paille sont les morceaux de paille qui constituent les côtés des pré-figures. Leur modélisation est un segment et cela amène davantage à se préoccuper des grandeurs géométriques comme la notion de longueur. Les figures correspondantes sont donc davantage conçues comme des objets de dimension 1 (Ibid). La dimension 2 sera nécessaire pour travailler les notions d'aires, ce qui amène encore un nouveau regard sur le dessin et sur la figure.

3 Signifiants langagiers

Les transformations opérées dans le processus de modélisation du monde réel vers la géométrie se traduisent dans un phénomène de secondarisation des genres (Rebière, 2002, 2013) au niveau langagier. Le tableau suivant résume quelques-unes de ces évolutions en lien avec le travail relatif aux polygones.

Monde réel (corde de 6m, cordelette, corde-paille)	**Dessin (objet matériel, trace sur un papier)**	**Figure (objet idéal des mathématiques)**
Nœud Pointe Trou dans le papier	Point, extrémité d'un trait	Point (dans tous les cas) Sommet (parfois)
Écart ou espace entre 2 nœuds consécutifs	Trait droit	Segment ou distance entre 2 points

Écartement entre 2 nœuds consécutifs Corde tendue entre 2 nœuds consécutifs		ou longueur du segment reliant 2 points
Corde tendue entre 2 « nœuds-sommets »	Trait droit	Côté du polygone (en tant que segment et en tant que longueur)
Morceau de paille	Trait droit	Segment ou unité de longueur
Plusieurs morceaux « alignés »	Trait droit	Segment ou côté

4 Pour conclure

Dans le groupe de l'IREM premier degré de Montpellier, nous avions anticipé une grande richesse didactique en élaborant cette séquence mais son potentiel a dépassé nos attentes. Nous pouvons souligner que l'essentiel de l'intérêt de l'outil « corde à treize nœuds » réside dans les aspects suivants :

- la motivation des enseignants comme des élèves, née de la curiosité pour cet outil nouveau dans les pratiques scolaires actuelles mais pourtant historiquement très ancien ;
- la possibilité de relier connaissances dans l'espace réel et modélisation par la géométrie ;
- la différenciation implicite entre dessin et figure, fondamentale pour la géométrie II.

Nous avons également développé une séquence en cycle 2 dont l'expérimentation a prouvé l'intérêt en termes d'apprentissages géométriques. D'autres développements sont possibles, notamment pour explorer des connaissances liées au cercle ou encore des connaissances du domaine numérique. L'intérêt historique est également non négligeable pour que les élèves puissent percevoir le long cheminement de la construction des connaissances, en lien notamment avec les outils dont dispose une communauté à un moment donné de son histoire.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Brousseau, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire, Séminaire de Didactique des Mathématiques, Rethymon

http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/51/51/10/PDF/Les_proprietes_didactiques_de_la_geometrie_elementaire.pdf

Duval R. et Godin M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures, Grand N n°76

Houdement C. & Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, Annales de didactiques et de sciences cognitives, 11, 175 – 193, IREM de Strasbourg.

Offre, B., Perrin-Glorian, M.-J. et Verbaere, O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2, Grand N, 77, 7- 34.

Parzysz B. (1988). Voir et savoir – la représentation du "perçu" et du "su" dans les dessins de la géométrie de l'espace. Bulletin de l'APMEP. Num. 364. p. 339-350.

Rabardel P. (1995). *Qu'est-ce qu'un instrument* ? Le mathématicien, le physicien et le psychologue, CNDP-DIE, p. 61-65.

Rebière M. (2002). Quelques remarques pour réfléchir au rôle des pratiques langagières dans les apprentissages en mathématiques, actes du 29e colloque Inter Irem, COPIRELEM

Rebière M. (2013). S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? Présentation de quelques concepts développés par le groupe de didacticiens du français de Bordeaux, In A. Bronner (Ed.), Actes de la 16e école d'été de didactique des mathématiques, Carcassonne, 2011. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Vergnaud G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 10 – 2–3 pp. 133-170

VII - ANNEXE 1 : FABRICATION DE LA CORDELETTE

Construire la corde à 13 noeuds...

1- Choisir une corde de 40 cm de longueur (environ)

2- Faire un nœud à une extrémité et une boucle à l'autre

3- Fermer la corde, la plier en 2, tracer une marque au milieu, puis faire un nœud sur la marque.

4. Prendre une moitié de la corde et la plier en 3.
Marquer les 2 plis, faire un nœud sur chacun d'entre eux.

5- Faire la même chose sur l'autre moitié.
La corde comporte à présent 7 nœuds et 6 intervalles.

6. Faire un noeud au milieu de chaque intervalle.
Ta corde comporte à présent 13 nœuds.

Attention, il faut que les espaces entre les noeuds soient les plus réguliers possible !