

Espace et géométrie au cycle 3

Cette ressource ne concerne pas les compétences « Se repérer, décrire ou exécuter des déplacements, sur un plan ou sur une carte. », « Accomplir, décrire, coder des déplacements dans des espaces familiers. » et « Programmer les déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran. » du domaine *Espace et géométrie* du programme de mathématiques du cycle 3, qui sont traitées dans une ressource dédiée : [Initiation à la programmation aux cycles 2 et 3.](#)

Objectifs

Les objectifs de l'enseignement du thème « Espace et géométrie » pendant la scolarité obligatoire sont multiples. Parmi eux, on peut citer :

- Acquérir des connaissances et compétences utiles pour la vie quotidienne :
 - un vocabulaire permettant de nommer les différentes formes géométriques usuelles en deux ou trois dimensions qui permettent de modéliser certains objets qui nous entourent ; cette modélisation permet ensuite de calculer des grandeurs (périmètre d'un terrain que l'on doit entourer d'une clôture, aire d'un mur que l'on doit tapisser, volume d'une pièce dont on doit assurer l'aération, etc.) ;
 - comprendre certaines représentations de l'espace (cartes, plans, dessins en perspective) et pouvoir s'en servir ou en construire ;
 - des connaissances en programmation, en anticipant des déplacements dans le plan ou l'espace, qui préparent les élèves à l'introduction d'algorithmes en informatique.
- Acquérir des connaissances et des automatismes pour la suite de la scolarité :
 - au cycle 4 et au lycée, la géométrie fournit de nouveaux outils performants (la trigonométrie, le théorème de Pythagore, les vecteurs, les équations ou systèmes d'équations, etc.) pour résoudre certains problèmes, mais une bonne compréhension et une bonne utilisation de ces notions nécessitent une réelle connaissance des configurations étudiées à l'école élémentaire et au collège ;
 - l'initiation à la programmation de déplacements menée aux cycles 2 et 3 dans le cadre du thème « Espace et géométrie » se poursuit au cycle 4 dans le cadre d'un nouveau thème « Algorithmique et programmation » qui sert de base non seulement à l'enseignement, obligatoire pour tous, d'algorithmique au sein des programmes de mathématiques du lycée d'enseignement général et technologique, mais aussi d'enseignements optionnels comme l'enseignement d'exploration « Informatique et création numérique » proposé en seconde.
- Acquérir des connaissances utiles en milieu professionnel :
 - des connaissances géométriques sont bien évidemment essentielles pour tous les métiers du bâtiment (maçon, architecte, peintre, etc.) et plus largement tous les métiers impliquant la construction d'objets en trois dimensions (dessinateur industriel, menuisier, cuisiniste, etc.) ;

- par ailleurs, les travaux menés dans le cadre de l'initiation à la programmation de déplacements, menés aux cycles 2 et 3, sont une première étape pour acquérir les notions informatiques de base, aujourd'hui nécessaires à l'exercice de toute activité professionnelle.
- Renforcer les aptitudes à raisonner et à argumenter dans toutes les disciplines :
 - La géométrie euclidienne est, depuis des siècles, un outil de formation sans égal pour s'exercer à la logique et au raisonnement. Elle se fonde, en effet, sur cinq axiomes¹ d'où découlent des théorèmes et propriétés qui serviront eux-mêmes à en construire de nouveaux ; chaque élément de l'édifice peut ainsi être démontré.
 - Dès le cycle 2, les élèves raisonnent et argumentent en utilisant les définitions et propriétés connues pour établir, par exemple, la nature d'une figure plane qui leur est présentée. Ainsi, un élève de CE2 ou CM1 peut établir qu'un quadrilatère est un rectangle en s'appuyant sur la définition (*Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits*) et en utilisant une équerre pour vérifier que les quatre angles du quadrilatère sont droits. Il peut ensuite établir qu'il ne s'agit pas d'un carré en s'appuyant sur une propriété (*Un carré a ses quatre côtés de la même longueur*) et, en utilisant une règle graduée, qu'un côté mesure 3 cm et 8 mm alors qu'un autre côté mesure 4 cm et 1 mm.

Liens avec les domaines du socle

Le vocabulaire lié aux objets et aux relations géométriques relève d'un langage spécifique à utiliser en situation : point, droite, demi-droite, segment, solide, face, arête, sommet, polyèdre, cube, pavé droit, pyramide, prisme, boule, cône, polygone, côté, angle, carré, rectangle, losange, parallélogramme, cercle, rayon, diamètre, milieu, médiatrice, hauteur, droites parallèles, droites perpendiculaires, etc. Les notations de droites, demi-droites, segments, longueurs, angles, etc., les notations représentant le parallélisme(//) ou la perpendicularité (\perp), l'utilisation du symbole « égale », comme par exemple $\widehat{ABC} = 32^\circ$ ou $AB = CD$, sont des éléments constitutifs d'un langage spécifique que les élèves doivent progressivement maîtriser. Les différents codages de figures sont d'autres éléments du langage mathématique intégré au domaine 1 du socle. Ce vocabulaire et ces notations sont introduits au fur et à mesure de leur usage et non au départ d'un apprentissage. (Domaine 1)

La géométrie, à travers les travaux de construction ou les problèmes de recherche, favorise l'implication dans le travail commun, l'entraide et la coopération. Pour effectuer des constructions ou pour argumenter, les élèves doivent anticiper, planifier des tâches, gérer les étapes. Ils savent qu'un même mot peut avoir des sens différents ; ils font, par exemple, la différence entre « un rayon du cercle » qui désigne un segment et « le rayon du cercle » qui désigne une longueur et d'autres sens du mot « rayon » utilisés dans les autres disciplines ou dans d'autres contextes. Pour acquérir des connaissances et des compétences, les élèves mémorisent progressivement des définitions et propriétés, apprennent à mobiliser les ressources à leur disposition (affichages, cahiers de savoirs et de savoir-faire, manuels, logiciels, etc.), à manipuler, à raisonner, à échanger et argumenter avec leurs pairs et à respecter les consignes. (Domaine 2)

Débattre et argumenter avec ses pairs pour fournir une preuve développent la capacité à écouter les autres, à respecter leurs points de vue tout en défendant le sien, à acquérir des règles communes au sein

¹ La géométrie euclidienne dans le plan repose sur cinq axiomes (aussi appelés postulats) :

1. Par deux points distincts, il passe une et une seule droite.
2. Tout segment peut être prolongé indéfiniment en une droite.
3. Pour tout segment, il existe un cercle dont le centre est une des extrémités du segment et dont le rayon est la longueur du segment.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Étant donné un point et une droite ne passant pas par ce point, il existe une unique droite passant par ce point et parallèle à la première droite.

de la classe. Les élèves apprennent ainsi à justifier leurs choix et à confronter leur raisonnement à ceux des autres et éventuellement à remettre en cause leurs premières conclusions. (Domaine 3)

Le travail mené en géométrie au cycle 3 contribue à donner aux élèves les fondements de la culture mathématique. La géométrie participe notamment au développement de la rigueur intellectuelle, de l'habileté manuelle, de l'aptitude à démontrer et à argumenter. (Domaine 4)

La modélisation en géométrie, l'utilisation et la construction de représentations de solides (perspective, patrons), l'utilisation et la production de plans, de cartes ou de maquettes, éventuellement à l'échelle, sont de multiples façons de représenter le monde. (Domaine 5)

Repères de progressivité

Si certains éléments géométriques sont rencontrés tout au long de la scolarité, la façon dont ils sont définis ou identifiés va varier d'année en année. L'argumentation attendue pour justifier qu'un polygone donné est bien un rectangle évolue tout au long des quatre premiers cycles. Au cycle 1, la reconnaissance est globale, les rectangles sont « plus ou moins allongés » et bien distincts des carrés. Si la situation est la même en début de cycle 2, elle évolue quand les élèves apprennent qu'un rectangle a quatre sommets, quatre côtés et quatre angles droits, cela leur permet d'acquérir progressivement des éléments pour justifier qu'un polygone donné est ou non un rectangle en s'appuyant sur des faits qu'ils peuvent eux-mêmes vérifier avec leurs outils en fin de cycle 2 (gabarit d'angle droit, règle graduée, équerre). Ces mêmes faits et outils permettent alors aux élèves de construire eux-mêmes des rectangles. Au cycle 3, ces faits se structurent davantage au niveau de la définition ou des propriétés qui permettent aux élèves d'affirmer qu'un polygone donné est ou n'est pas un rectangle. Au cours de la dernière année du cycle, les élèves se détachent progressivement des mesures effectuées directement sur les figures, l'équerre n'est plus utilisée pour prouver qu'un angle est droit et la règle graduée ne permet plus de justifier que deux segments donnés ne sont pas de même longueur². Les énoncés disponibles, qui continuent de s'enrichir tout au long du cycle 3, concernent également les diagonales du rectangle à partir de la classe de sixième. Au cycle 4, les élèves prouvent qu'un polygone est un rectangle en utilisant à la fois les connaissances acquises précédemment et de nouveaux outils comme le théorème de Pythagore qui leur permet de déterminer des longueurs ou d'affirmer qu'un angle donné est droit. Ces changements de registres tout au long de la scolarité nécessitent d'être explicités pour justifier qu'une preuve acceptable à un moment donné ou dans un certain contexte ne le sera plus ultérieurement ou dans un autre contexte.

La géométrie n'est pas un champ fermé se développant indépendamment des autres enseignements tout au long de la scolarité. Au contraire, de cycle en cycle, elle contribue à développer des compétences utiles pour d'autres domaines des mathématiques et les autres disciplines et réciproquement elle s'appuie sur des connaissances, savoir-faire et compétences développés dans les différents champs disciplinaires.

- **Au cycle 1**, la place du langage est primordiale, les élèves découvrent un vocabulaire spécifique, précis, servant à désigner des solides (*cube*, *pyramide*, *cylindre* ou *boule*). Ils classent des objets selon des caractéristiques liées à leur forme. Les faces des solides rencontrés leur permettent de nommer quelques figures planes (*carré*, *rectangle*, *triangle*, *disque*) qu'ils apprennent ensuite à reproduire. Pour se repérer dans l'espace les élèves apprennent à utiliser des marqueurs

² Pour aller plus loin sur ce changement de statut de la figure dans la construction des preuves, le lecteur pourra se reporter à l'annexe du document ressources du cycle 4 sur la géométrie plane : [Deux géométries en jeu dans la géométrie plane : une qu'on appellera « dessinée » et une qu'on appellera « abstraite »](#), par Catherine Houdement et Jean-Philippe Rouquès.

spatiaux (*devant, derrière, droite, gauche, dessus, dessous...*) dans des récits, descriptions ou explications. Ils apprennent ainsi à restituer leurs déplacements et à en effectuer à partir de consignes orales. Ils utilisent ou produisent diverses représentations de l'espace à trois dimensions (photos, maquettes, dessins, plans...).

- **Au cycle 2**, les élèves renforcent à la fois leurs connaissances spatiales comme l'orientation et le repérage dans l'espace et leurs connaissances géométriques sur les solides et sur les figures planes. Le travail sur les solides est mené exclusivement avec des objets en trois dimensions en début de cycle, le vocabulaire *sommet, arête* et *face* est travaillé avec des polyèdres ; les premières représentations planes de solides (photos ou dessins en perspective, patrons) sont introduites en travaillant en parallèle avec les solides et leurs représentations. Apprendre à se repérer et se déplacer dans l'espace se fait en lien étroit avec le travail mené dans Questionner le monde et en Éducation physique et sportive ; les compétences à développer pour ces repérages et ces déplacements s'appuient sur le travail mené à l'école maternelle et permettent aux élèves de coder et décoder pour pouvoir représenter et effectuer des déplacements dans des espaces familiers ou sur un quadrillage. Les connaissances géométriques contribuent à la construction des concepts fondamentaux d'alignement, de distance, d'égalité de longueurs, de parallélisme, de perpendicularité, de symétrie. Les figures planes, qui sont reconnues de façon globale en début de cycle sont progressivement décomposées en éléments simples : des points (*sommets, centre, point d'intersection de deux droites*), des segments (*côtés, rayons, diamètres*) et des *angles droits* permettant de les décrire, de les construire avec précision et d'établir, lors des temps d'institutionnalisation, des énoncés pour les définir ou rendre compte de certaines de leurs propriétés.
- **Au cycle 3**, le travail mené au cycle 2 pour accomplir, décrire, coder des déplacements ou pour programmer des déplacements de robots ou de personnages sur un écran se poursuit en se complexifiant. Des logiciels comme Scratch peuvent être introduits dès le début du cycle. De même, pour les travaux sur les figures simples le vocabulaire s'enrichit (*triangle isocèle, triangle équilatéral, losange, parallélogramme, diagonale, médiatrice, etc.*) permettant de nommer davantage d'objets géométriques, de décrire les figures avec plus de précision et de produire des raisonnements argumentés pour établir la nature d'une figure donnée. L'utilisation fréquente des outils de construction permet de renforcer la compréhension des propriétés étudiées (perpendicularité, égalité de longueurs, parallélisme, milieu, symétrie, égalité d'angles, etc.). En lien avec le domaine « Grandeurs et mesures », la notion d'angle est abordée en début de cycle, la comparaison d'angles avec l'angle droit (*angles obtus* ou *aigus*) permet de discuter la nature de certaines figures (*triangles rectangles, rectangles, carrés*) ; en dernière année de cycle, le rapporteur et une unité pour mesurer les angles (*le degré*) sont introduits, ils permettent la construction de nouvelles figures. Le travail sur la symétrie axiale se poursuit, les élèves apprennent à construire les symétriques par rapport à une droite de figures de plus en plus complexes. Pour les solides, les élèves apprennent à construire eux-mêmes des patrons de cubes, qu'ils ont manipulés au cycle 2, puis des patrons de pavés droits. Ils travaillent avec des patrons de prismes droits ou de pyramides, qu'ils savent associer aux solides ou aux représentations de solides qu'ils permettent de construire. Les élèves apprennent à interpréter et à reproduire des représentations en perspective de solides de plus en plus complexes et à construire eux-mêmes de telles représentations dans des cas très simples.
- **Au cycle 4**, les élèves continuent à raisonner, argumenter et discuter sur les propriétés et la nature de figures simples ; les informations qu'ils peuvent utiliser sont soit fournies par l'énoncé (éventuellement une figure codée), soit déduites de propriétés connues (si deux droites sont parallèles alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre, propriétés de figures planes, angles alternes-internes, etc.) ou de calculs basés éventuellement sur des théorèmes connus (somme des mesures des angles d'un triangle, théorème de Pythagore, théorème de Thalès, etc.). Le travail dans l'espace se poursuit en continuant à travailler la vision dans l'espace avec des vues en perspectives, en coupe, du dessus, etc. ou avec des patrons ou

des maquettes. Le repérage dans l'espace se complexifie en travaillant le repérage dans un parallélépipède rectangle et sur une sphère, en faisant le lien avec la Terre (longitude et latitude). Le travail mené sur la programmation de déplacements aux cycles précédents se poursuit dans un thème indépendant du thème « Espace et géométrie » appelé Algorithme et programmation au sein duquel les élèves sont appelés à écrire, mettre au point et exécuter des programmes simples en explorant d'autres champs que celui de la géométrie.

Stratégies d'enseignement

Différents types de tâches en géométrie

Afin de faire émerger et d'enrichir les concepts géométriques, le programme invite à proposer différents types de tâches aux élèves :

- **Reconnaître** : identifier, de manière perceptive, en utilisant des instruments ou en utilisant des définitions et des propriétés, une figure géométrique plane ou un solide. Exemple : reconnaître qu'un quadrilatère est un rectangle ou reconnaître un rectangle parmi un ensemble de figures géométriques.
- **Nommer** : utiliser à bon escient le vocabulaire géométrique pour désigner une figure géométrique plane ou un solide ou certains de ses éléments. Exemple : nommer différents éléments d'un disque : rayon, diamètre, centre.
- **Vérier** : s'assurer, en recourant à des instruments ou à des propriétés, que des objets géométriques vérifient certaines propriétés (points alignés, droites perpendiculaires, etc.), ou s'assurer de la nature d'une figure géométrique ou d'un solide.
- **Décrire** : élaborer un message en utilisant le vocabulaire géométrique approprié et en s'appuyant sur les caractéristiques d'une figure géométrique pour en permettre sa représentation ou son identification. Exemple : jeu du portrait.
- **Reproduire** : construire une figure géométrique à partir d'un modèle fourni avec les mêmes dimensions ou en respectant une certaine échelle. Exemple : reproduire une figure complexe en la décomposant en plusieurs figures simples.
- **Représenter** : reconnaître ou utiliser les premiers éléments de codage d'une figure géométrique plane ou de représentation plane d'un solide (perspective, patron).
- **Construire** : réaliser une figure géométrique plane ou un solide à partir d'un programme de construction, un texte descriptif, une figure à main levée, etc.

La pratique de ces tâches tout au long du cycle conduit à prévoir une progressivité de période en période et éventuellement des éléments de différenciation dépendant des besoins des élèves reposant sur des choix et des évolutions concernant :

- le support de construction des figures (papier pointé, quadrillé ou uni, logiciel de géométrie ou de programmation, etc.) ;
- la nature des figures, des éléments qui la composent ;
- les éléments directement visibles (analyse « immédiate ») ou non tracés (« à trouver ») pour reproduire (alignement, prolongement, milieu, angles droits, parallèles, etc.) ;
- les contraintes pour la reproduction (support, tracé à main levée avec des codages ou tracé avec des instruments, présence ou non d'une amorce à compléter, instruments autorisés, à la même échelle ou non, etc.) ;
- le support de prise d'information (figure à reproduire à l'identique, dessin à main levée avec des codages, programme de construction, description, etc.).

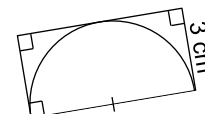
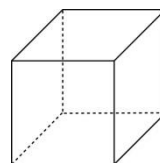
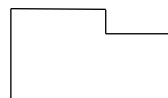
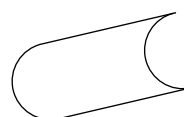
Les outils de construction

L'utilisation des outils de construction est un enjeu majeur de l'enseignement de la géométrie au cycle 3. Des travaux de reproduction ou de construction doivent être proposés lors de chaque période de chaque année du cycle. La manipulation physique des outils contribue à la compréhension et l'assimilation des différentes propriétés géométriques (alignement, perpendicularité, parallélisme, etc.) et à la connaissance et reconnaissance des figures simples usuelles (triangle, triangle rectangle, triangle isocèle, triangle équilatéral, quadrilatère, etc.).

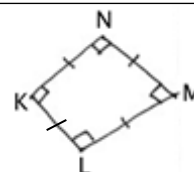
Les constructions géométriques ont un rôle essentiel dans les apprentissages. Elles permettent de réinvestir les définitions et les propriétés qui ont été institutionnalisées. Ces constructions peuvent s'effectuer à partir d'un texte ou d'une figure codée. Le choix des instruments peut être laissé ou non à l'initiative des élèves.

Construire des figures contribue à développer les compétences travaillées en mathématiques, par exemple :

- **Chercher**, en s'interrogeant sur la manière de décomposer une figure complexe en figures simples pour pouvoir la reproduire.
- **Modéliser** le sol de la classe par un rectangle ou un autre polygone pour le dessiner à une certaine échelle.
- **Représenter** un pavé droit par un dessin en perspective cavalière ou un dessin à main levée pour mettre en place une stratégie de construction.
- **Raisonner** pour pouvoir construire une figure en utilisant une définition ou des propriétés connues.
- **Calculer** pour disposer des données nécessaires pour effectuer une construction.
- **Communiquer** en rédigeant un programme de construction ou en utilisant des codes sur une figure dessinée à main levée.



Tracer un triangle ABC ayant un périmètre de 17 cm tel que $AB = 5 + \frac{3}{10}$ cm et $AC = 6 + \frac{5}{10}$ cm.



Les temps consacrés à la construction de figures doivent être suffisamment longs pour permettre à tous les élèves d'effectuer eux-mêmes les constructions attendues.

Si l'aide entre élèves peut être particulièrement utile et doit être encouragée lors des temps d'apprentissage, il est néanmoins nécessaire de s'assurer qu'elle ne consiste pas à « faire à la place de », mais qu'elle permet bien à l'élève aidé d'apprendre à chercher, à raisonner, à modéliser, à représenter et à communiquer pour réaliser la construction demandée. L'accompagnement de l'enseignant est ici essentiel pour garantir un apprentissage, tant pour l'élève aidé que pour l'élève aidant (apprendre à guider, à aider...).

Ces temps de construction sont propices à un travail différencié, les besoins d'accompagnement et les temps nécessaires pour réaliser les figures pouvant être très variables selon les élèves. Il est nécessaire lors de ces séances de construction d'explicitier aux élèves l'attendu pour tous, de s'assurer que les

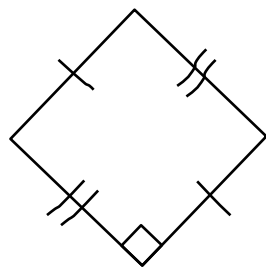
élèves les moins rapides ont bien atteint cet attendu et que les plus performants ont pu être maintenus en réelle activité mathématique leur permettant d'aller plus loin, d'acquérir de nouvelles connaissances ou compétences, sur l'ensemble de la séance.

L'institutionnalisation en géométrie

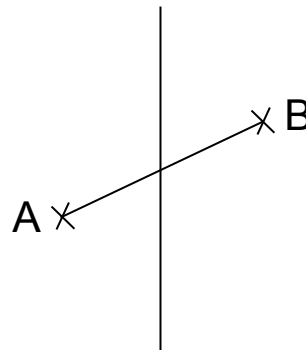
Comme pour les autres domaines des mathématiques, les élèves ont besoin d'écrits auxquels se référer (affichages et cahiers personnels d'élèves). Les énoncés contenus dans ces écrits doivent être connus, appris et mémorisés à plus ou moins court terme. Ils sont indispensables au développement d'automatismes et à la résolution de problèmes. Les cahiers d'élèves peuvent être utilisés plusieurs années.

Les « écrits de savoir », l'institutionnalisation, ne sont pas un préalable au travail mené en géométrie, mais une étape qui arrive après de nombreux travaux de construction et d'écrits intermédiaires produits par les élèves. Ces « écrits de savoir » ne sont pas une fin en soi. Au contraire, les élèves doivent être incités à les utiliser régulièrement dans les travaux de construction et de recherche menés en classe.

Afin de permettre aux élèves de s'appuyer sur les propriétés des figures, l'enseignant veille lors des temps d'institutionnalisation ou lors de la conception d'affichages à ce que les figures ne soient pas systématiquement placées dans des configurations que l'on qualifie habituellement de « prototypiques » : le rectangle ou le carré « posés » sur un côté, le losange « posé » sur un sommet, le segment dont on trace la médiatrice tracé horizontalement, etc. En effet, ces configurations conduisent ensuite à des conceptions erronées et à des réponses fausses, comme dans les deux exemples ci-dessous :



C'est un losange



La médiatrice du segment [AB]

Les énoncés mathématiques : définitions, propriétés et propriétés caractéristiques

Pour amener les élèves à reconnaître, nommer, décrire, reproduire, représenter et construire des figures simples, il est nécessaire de les doter d'un certain nombre de définitions, propriétés et propriétés caractéristiques. Il ne s'agit pas au stade du cycle 3 de faire un cours théorique sur les polygones usuels, mais de donner des éléments explicites aux élèves pour leur permettre de répondre aux questions concernant les polygones. L'une des difficultés du travail sur les figures repose sur le fait que l'argumentation attendue pour répondre à la question « Est-ce que cette figure est un rectangle ? » va varier chaque année ou presque du cycle 1 à la fin du cycle 3.

Trois types d'énoncés sont rencontrés progressivement au cycle 3 : des définitions, des propriétés et des propriétés caractéristiques. Ces différents types d'énoncés sont notés dans les cahiers lors des phases d'institutionnalisation et les élèves s'y réfèrent autant que nécessaire pour répondre aux questions qui leur sont posées.

- Une **définition** est une affirmation qui consiste à donner un nom à un objet vérifiant certaines propriétés ; elle se formule généralement en employant le verbe être. La définition d'un objet géométrique fait référence à des objets ou des relations déjà connus. La façon de définir une figure plane n'est pas nécessairement unique et va varier tout au long des premières années d'enseignement. Il est néanmoins souhaitable de garder une certaine cohérence sur la façon de définir une figure donnée tout au long du cycle. Les définitions permettent d'affirmer qu'une figure donnée est bien d'une certaine nature, par exemple de pouvoir affirmer qu'un polygone donné est bien un rectangle. Ci-dessous sont proposées plusieurs traces écrites pour les élèves du début du cycle 2 à la fin du cycle 3 pour « définir » ce qu'est un rectangle :

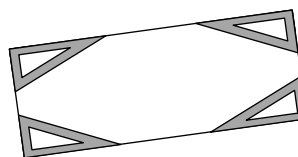
En début de cycle 2

Un rectangle



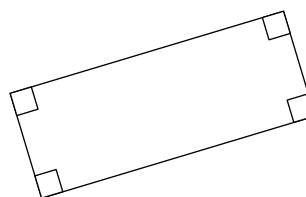
En milieu de cycle 2

Un rectangle



En fin de cycle 2 et en début de cycle 3

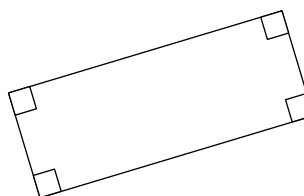
On appelle rectangle un quadrilatère qui a quatre angles droits.



En milieu de cycle 3

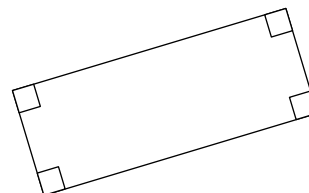
Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits.

Un quadrilatère qui a quatre angles droits est un rectangle.



En dernière année de cycle 3

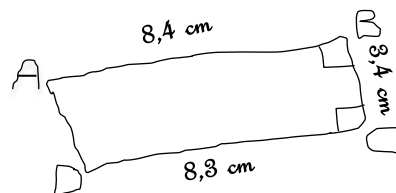
Définition : Un rectangle est un quadrilatère ayant 4 angles droits.



Le verbe être est généralement utilisé pour les définitions, mais il a un sens particulier dans les définitions mathématiques qui n'est pas celui de l'usage quotidien ou des autres disciplines. Quand on dit « *Un lapin est un mammifère.* », cela signifie que tous les lapins sont des mammifères et implique une relation d'inclusion entre l'ensemble des lapins et l'ensemble des mammifères, l'inclusion est stricte : certains mammifères ne sont pas des lapins. En revanche, quand on définit le rectangle en écrivant « *Définition : Un rectangle est un quadrilatère ayant quatre angles droits.* », cela signifie non seulement que tous les rectangles sont des quadrilatères ayant quatre angles droits mais aussi que tous les quadrilatères ayant quatre angles droits sont

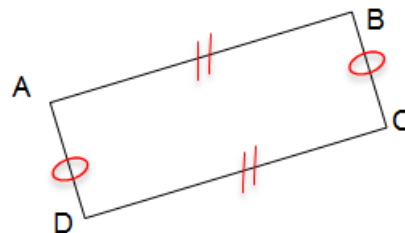
des rectangles. On note que pour l'avant-dernière institutionnalisation ci-dessus l'enseignant a fait le choix d'écrire la définition dans l'autre sens également pour expliciter davantage cette réciprocity.

- Une **propriété** d'un certain type de figures planes précise des éléments vérifiés par l'ensemble des figures de ce type, mais ces éléments peuvent aussi être vérifiés par des figures d'un autre type. Par exemple, « *Un rectangle a ses côtés opposés de même longueur* » signifie que tous les rectangles ont leurs côtés opposés de même longueur. Un parallélogramme qui n'est pas un rectangle vérifie aussi cette propriété, qui ne permet donc pas de caractériser un rectangle. Il s'agit là d'une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour être un rectangle. Le verbe avoir est généralement utilisé pour énoncer les propriétés.
- Les propriétés ne permettent pas de dire qu'une figure donnée est d'un certain type, mais elles peuvent permettre de dire qu'elle n'est pas d'un certain type. Par exemple, nous pouvons affirmer que le quadrilatère ABCD dessiné à main levée ci-contre n'est pas un rectangle car « *Un rectangle a ses côtés opposés de même longueur.* »...³
- Au cours du cycle 3 les élèves pourront, par exemple, rencontrer les propriétés suivantes lors de leurs travaux sur le rectangle :



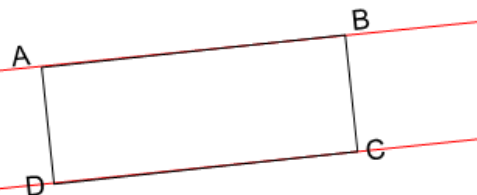
Un rectangle a ses côtés opposés de même longueur.

$$AB = DC \text{ et } AD = BC$$



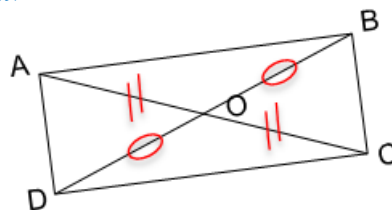
~~*Un rectangle a ses côtés opposés parallèles.*~~

~~$$(AB) // (DC) \text{ et } (AD) // (BC)$$~~



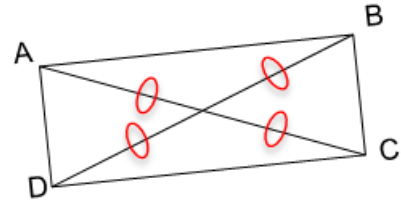
Un rectangle a ses diagonales qui se coupent en leur milieu.

$$AO = OC \text{ et } BO = OD$$



³ Il s'agit ici de ce que les mathématiciens ou logiciens qualifient de « **raisonnement par contraposée** ». Si l'on a l'implication « *Si A alors B* », alors on peut en déduire sa **contraposée** : « *Si non B alors non A* ». Par exemple, l'affirmation « Si il pleut alors il y a des nuages » est vraie et on peut en déduire que « Si il n'y a pas de nuages alors il ne pleut pas ». La contraposée « *Si non B alors non A* » ne doit pas être confondue avec la **réciproque** « *Si B alors A* » qui contrairement à la contraposée n'est pas nécessairement vraie, pour notre exemple nous voyons bien que la réciproque « Si il y a des nuages alors il pleut » est fausse... Tout ceci est bien entendu hors programme.

Un rectangle a ses diagonales de même longueur.
 $AC = BD$



- Une **propriété caractéristique** permet d'établir la nature d'une figure à l'aide d'éléments autres que ceux de sa définition. Une propriété caractéristique peut être formulée au cycle 3 sous la forme « Si..., alors... », par exemple : « Si un quadrilatère a ses diagonales qui sont de même longueur et qui se coupent en leur milieu, alors c'est un rectangle ». Ce type d'énoncé est rencontré en dernière année de cycle 3. Cette formulation « Si..., alors... » pourra être mise en lien avec les instructions conditionnelles lors de l'initiation à la programmation.

Le document [Les polygones](#), en annexe, propose un certain nombre de définitions, propriétés et propriétés caractéristiques pouvant être rencontrées au cycle 3 dans le cadre de l'étude des polygones usuels.

Le cas particulier du disque

Au cycle 1, l'élève a appris à reconnaître et à nommer les disques ou les cercles sans faire la différence entre les deux. Au cycle 2, l'élève a construit des cercles de façon libre au départ puis avec des contraintes sur le centre, un point du cercle ou le rayon du cercle. Il a, à cette occasion, appris à utiliser en situation le mot *centre* et le mot *rayon* utilisé principalement dans le sens de longueur, mais également pour désigner des segments. En fin de cycle 2, les élèves commencent à différencier la surface appelée *disque* de son contour appelé *cercle*. Si au cycle 2 l'enseignant veille à ne pas utiliser un mot pour un autre tout en restant très tolérant sur l'expression des élèves, au cycle 3 l'enseignant va plus loin et commence à exiger progressivement des élèves qu'ils fassent également la distinction entre les deux.

Au cycle 3, les temps de recherche et d'institutionnalisation sur le disque ou le cercle sont propices à un travail croisé avec l'apprentissage du français. Deux exemples :

- pour mener des travaux sur la polysémie, le mot rayon est particulièrement riche, il a non seulement de nombreux sens dans la langue française, mais même en mathématiques il a deux sens différents, il peut à la fois désigner un segment (segment d'extrémités un point du cercle et le centre du cercle) et une longueur (distance entre un point du cercle et le centre du cercle), le mot centre est également polysémique ;
- pour mener des travaux sur les déterminants, on dit « *le* centre du cercle » et non pas « *un* centre du cercle », on dit « *un* rayon du cercle » pour désigner un segment d'extrémités un point du cercle et le centre du cercle, et « *le* rayon du cercle » désigne la longueur de ce segment, mais « *le* rayon [OA] » désigne un segment particulier...

Le vocabulaire pouvant être rencontré par les élèves dans le cadre de travaux sur le cercle tout au long du cycle 3 est rappelé dans le document [Le disque et le cercle](#) en annexe.

Les angles

Le travail sur les angles est mené en lien avec les compétences à développer dans le cadre du champ Grandeurs et mesures. À l'école élémentaire, le travail ne porte que sur la grandeur « angle », sans référence aux mesures. Les élèves sont amenés à comparer des angles, notamment par rapport à l'angle droit (angle aigu ou angle obtus), à l'aide d'une équerre ou d'un gabarit. Ils sont également amenés à construire des angles superposables en utilisant des gabarits, notamment dans le cadre de reproduction

de figure de même grandeur ou à l'échelle. Au collège, l'unité de mesure « degré » est introduite, elle permet de faciliter la reproduction d'angles ou de figures géométriques à l'aide du rapporteur. Le vocabulaire utilisé peut éventuellement s'élargir en fonction des besoins, mais ne doit pas faire l'objet d'un apprentissage spécifique. Le vocabulaire pouvant être rencontré est rappelé dans le document [Les angles](#) en annexe.

Les notations en géométrie

À l'école élémentaire, lorsque des lettres sont utilisées pour désigner des points, des droites ou des angles, le professeur veille à toujours préciser explicitement l'objet dont il parle : « le point A », « le segment [AB] », « le triangle ABC », « la droite d », « l'angle \hat{a} », etc. Aucune maîtrise n'est attendue des élèves pour ce qui est des codages (par exemple, l'usage des crochets pour un segment) avant la dernière année du cycle. L'enseignant qui, lui, utilisera toujours la notation correcte au tableau, jugera de la pertinence ou non de corriger sur les productions des élèves d'éventuelles notations non conformes. Les nouvelles notations sont introduites au fur et à mesure de leur utilité, et non au départ d'un apprentissage.

Pour mémoire :

- (AB) désigne la droite passant par A et B ;
- [AB] désigne la demi-droite d'origine A passant par B, la notation (BA) n'est pas conforme aux usages ;
- \overline{AB} désigne le segment d'extrémités A et B ;
- AB désigne la longueur du segment [AB], on écrit, par exemple, $AB = 3,4 \text{ cm}$, mais on ne peut pas écrire une égalité de longueur en utilisant la notation [AB] ;
- ABC, sans parenthèses, désigne le triangle de sommets les points A, B et C ;
- une lettre comme d, sans parenthèses, en minuscule, peut être utilisée pour désigner une droite, comme dans « le point A appartient à la droite d » ;
- \widehat{ABC} , avec un « chapeau », est utilisé pour désigner l'angle (saillant) de sommet B délimité par les demi-droites [BA) et [BC) ;
- \widehat{AB} désigne un arc de cercle d'extrémités les points A et B, il y en a deux, on peut dire « l'arc \widehat{AB} passant par C ».

Les symboles \in et \notin mettent en relation un point et un ensemble de points⁴.

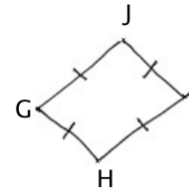
EXEMPLE DE REPRESENTATION	UTILISATION DES SYMBOLES \in ET \notin
	<p>Le point C appartient à la droite (AB) se note : $C \in (AB)$.</p> <p>Le point D n'appartient pas à la droite (AB) se note : $D \notin (AB)$.</p> <p>Le point E appartient au segment [AB] se note : $E \in [AB]$.</p> <p>Le point C n'appartient pas au segment [AB] se note : $C \notin [AB]$.</p>

⁴ Entre deux ensembles de points on ne parle pas d'appartenance mais d'inclusion, ainsi on ne peut pas dire « le segment [AB] appartient à la droite (AB) » ni écrire « $[AB] \in (AB)$ », pas plus qu'on ne peut écrire « $[CD] \notin (AB)$ », la façon correcte de dire les choses en mathématiques serait : « le segment [AB] est inclus dans la droite (AB) » ce qui s'écrit « $[AB] \subset (AB)$ », mais ceci n'est ni au programme du cycle 3 ni même au programme du cycle 4.

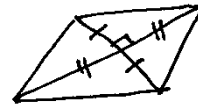
Le codage des figures géométriques

Le codage pour les angles droits et les segments de même longueur est introduit dès la première année du cycle 3, en habituant les élèves à coder les figures qu'ils construisent ou qui leur sont fournies.

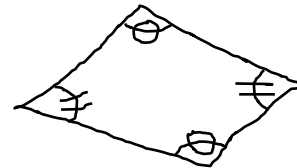
Ils seront ensuite invités à identifier la nature de figures dessinées à main levée mais codées, comme les figures ci-contre. De tels travaux peuvent être menés dès la deuxième année du cycle 3, en parallèle d'exercices pour lesquels les figures fournies sont en vraie grandeur et les outils comme l'équerre ou la règle graduée sont utilisées pour identifier la nature des figures. Ce changement de registre doit être explicité autant que nécessaire. L'usage de figures construites à main levée peut être particulièrement approprié lors de temps de « questions flash » proposées en vidéoprojection. Les temps de mise en commun sont l'occasion de travailler l'expression orale en invitant les élèves à présenter de façon claire et ordonnée leurs justifications.



Ce type de travail se poursuit en se complexifiant en dernière année du cycle, notamment en utilisant les propriétés rencontrées sur les diagonales de quadrilatères.



Au collège, les élèves rencontrent également un nouveau type de codage permettant d'indiquer que deux angles ont la même mesure.



La symétrie axiale

Au cycle 2, les élèves ont travaillé sur les axes de symétrie. Ils ont cherché des axes de symétrie de figures qui leur étaient fournies ou ils ont complété des figures pour qu'une droite donnée soit un axe de symétrie de la figure complétée. Le pliage de la feuille ou l'utilisation de papier calque pouvaient leur permettre de mener à bien la tâche qui leur était assignée.

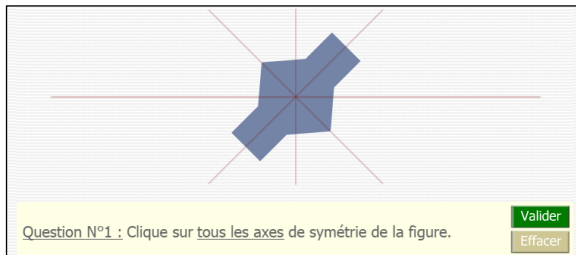
Au cycle 3, la symétrie axiale est progressivement introduite en lien avec la notion d'axe de symétrie, les consignes vont évoluer progressivement de « compléter la figure pour que la droite soit un axe de symétrie » à « dessiner le symétrique de la figure par rapport à l'axe ».

Le pliage de la feuille ou l'utilisation de papier calque n'est alors plus utilisé a priori mais seulement pour valider une réponse ou corriger d'éventuelles erreurs.

Dès la dernière année du cycle 2, l'utilisation de logiciels en ligne permettant :

- de placer des axes de symétrie, comme le site [Mathenpoche](#),
- de compléter des figures pour qu'une droite soit axe de symétrie, comme le site [Matoumatheux](#) ou le site Mathenpoche,

est particulièrement pertinente, car ces logiciels permettent aux élèves de corriger leurs éventuelles erreurs eux-mêmes et immédiatement tout en les obligeant à visualiser intérieurement l'effet de la symétrie, le pliage du support n'étant plus possible.



[Reconnaître des axes de symétrie sur le site mathenpoche](#)

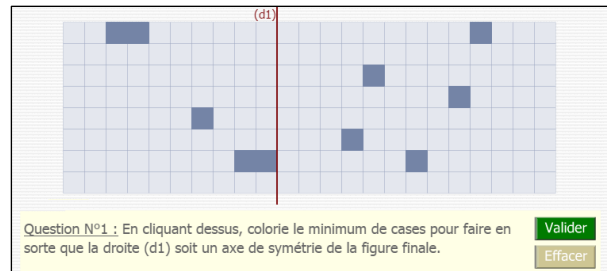
La symétrie axiale CE2-CM1

L'axe est horizontal

Construis le symétrique de la figure suivante par rapport à la droite orange en cliquant sur les bons carrés.

[autre exemple](#)

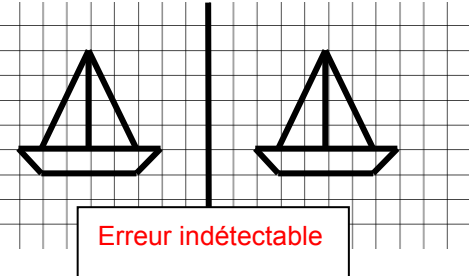
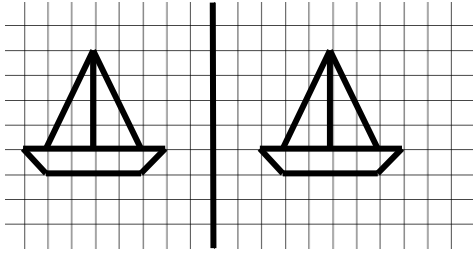
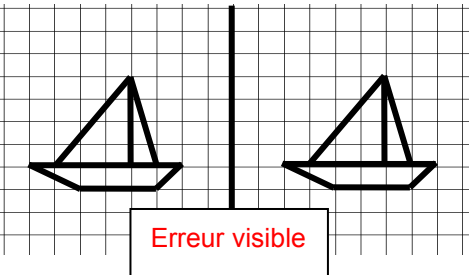
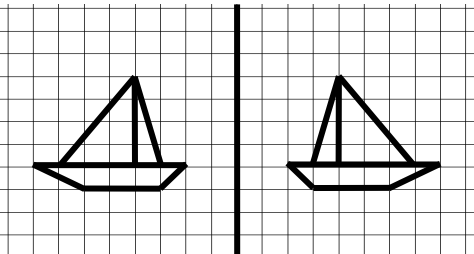
[Compléter une figure pour qu'une droite soit un axe de symétrie sur le site matoumatheux](#)



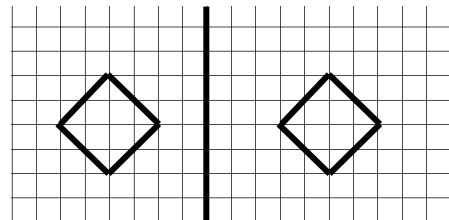
[Compléter une figure pour qu'une droite soit un axe de symétrie sur le site mathenpoche](#)

En début de cycle 3, le travail est mené uniquement sur papier pointé ou quadrillé avec un axe vertical ou horizontal dans un premier temps puis avec des axes en diagonale.

Afin d'éviter de laisser s'installer des conceptions erronées, l'enseignant doit s'assurer de ne pas faire construire le symétrique d'une figure qui possède un axe de symétrie parallèle à la droite par rapport à laquelle le symétrique de la figure doit être tracé. En effet de telles figures ne permettraient pas de repérer les erreurs d'élèves qui effectueraient des translations et non des symétries.

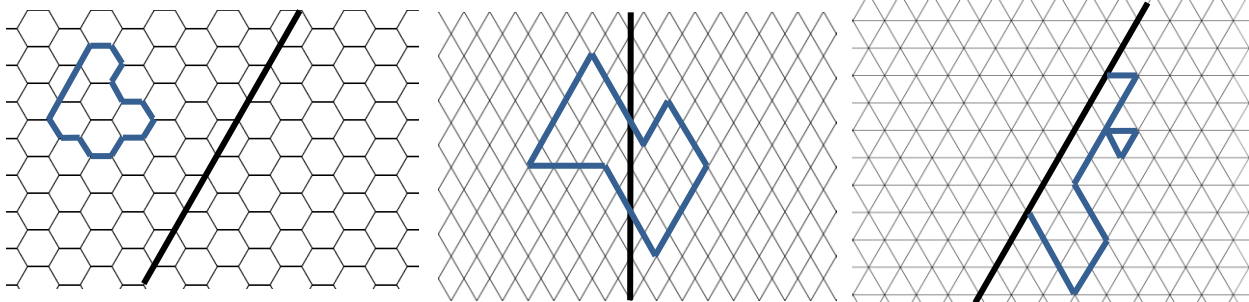
ÉLÈVE QUI EFFECTUE UNE TRANSLATION AU LIEU D'UNE SYMÉTRIE AXIALE	ÉLÈVE QUI EFFECTUE BIEN UNE SYMÉTRIE AXIALE
	
	

De même, ne pas placer l'axe systématiquement au milieu de la feuille peut permettre de repérer des élèves qui n'ont pas compris que la transformation est à mener par rapport à l'axe et non par rapport aux bords de la feuille.



En milieu de cycle 3, l'enseignant veillera à proposer une grande variété de situations, en faisant varier :

- le type de quadrillage⁵ ;
- l'orientation de l'axe ;
- la position de la figure par rapport à l'axe ;
- des figures de plus en plus complexes.



⁵ Il est possible de créer des feuilles de papier avec des quadrillages [carrés](#), [triangulaires](#), [hexagonaux](#), [en losanges](#) ou de papier pointé avec des points [alignés](#) ou [alternés](#) sur des sites comme <http://incompetech.com/>.

Puis apparaitront les premières constructions du symétrique d'une figure sur papier uni en utilisant l'équerre et la règle graduée dans des cas très simples (quelques points, segments ou triangles). Le pliage pourra être utilisé pour valider les constructions.

En dernière année de cycle 3, les élèves continuent de construire des symétriques de figures par rapport à une droite sur papier quadrillé ou pointé. Ils continuent aussi de construire des symétriques de figures par rapport à une droite sur papier uni, les figures se complexifient et l'utilisation de la règle graduée pour placer le point image à la même distance de l'axe que le point initial peut être remplacée par l'utilisation du compas. La construction de symétriques au compas seulement, sans équerre, pourra être proposée à certains élèves, après l'introduction de la médiatrice, lors de travaux différenciés.

L'espace et les solides

Le travail sur l'espace et les solides au cycle 3 s'articule autour de deux grands axes :

- **la maîtrise d'un vocabulaire spécifique** pour nommer, décrire et reconnaître quelques solides usuels ;
- **la reconnaissance, l'utilisation et la construction de représentations de l'espace** sous forme de plan, de vues sous différents angles, de photographies, de patrons, etc.

Le travail sur les solides rencontrés au cycle 2 (boule, cylindre, cône, cube, pavé droit, pyramide) se poursuit au cycle 3 en s'enrichissant. Comme au cycle 2, les élèves continuent à manipuler des objets en trois dimensions qu'ils nomment, trient et classent en utilisant le vocabulaire qu'ils ont appris (noms des solides, faces, arêtes, sommets). Les élèves rencontrent de nouveaux solides : des prismes droits et des pyramides régulières.

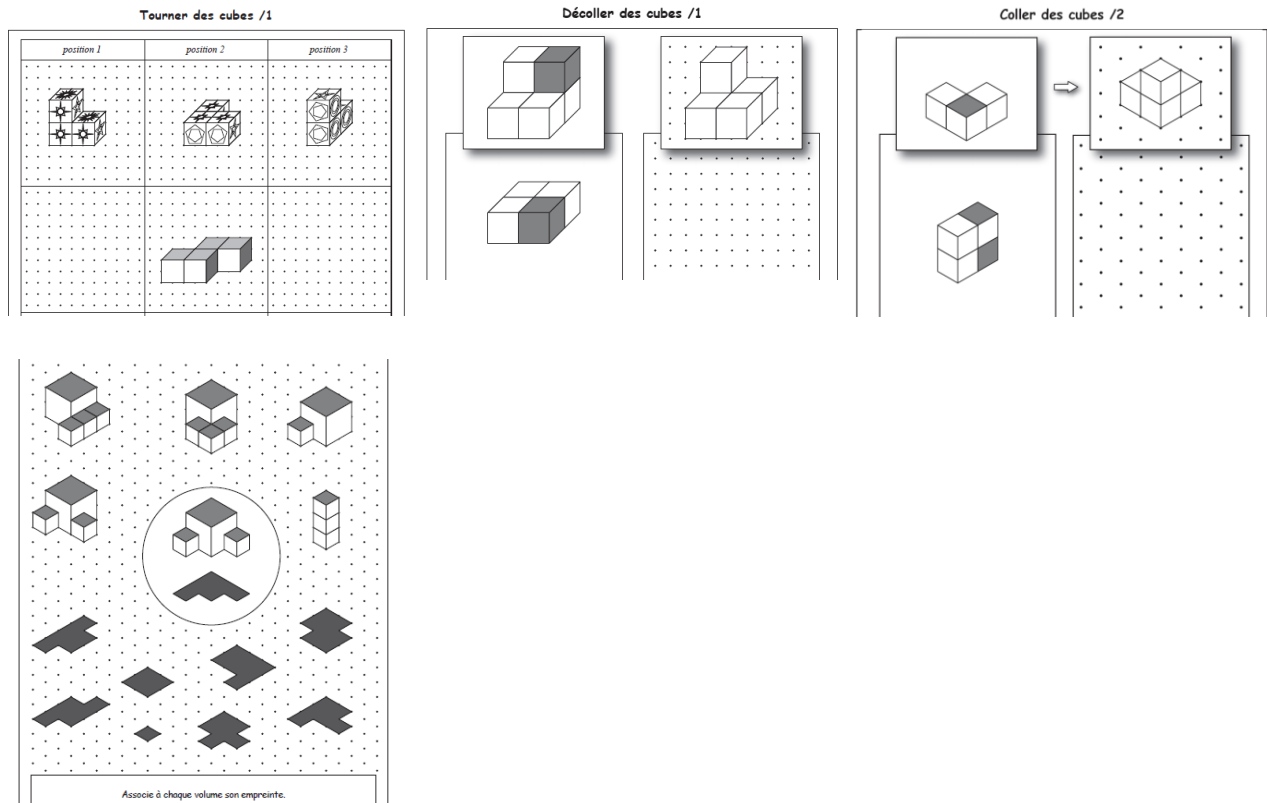
SOLIDE	EXEMPLES DE REPRÉSENTATIONS EN PERSPECTIVE
<p>Un prisme droit est un polyèdre ayant deux faces parallèles et superposables appelées bases et dont les autres faces sont des rectangles.</p>	
<p>Une pyramide régulière est un polyèdre dont une face, appelée base, est un polygone régulier*, et dont les autres faces sont des triangles isocèles.⁶</p> <p>*Polygone convexe ayant tous ses côtés de même longueur et inscrit dans un cercle.</p>	

⁶ Étant donnée la complexité d'une définition rigoureuse pour la « pyramide régulière », l'enseignant pourra simplement parler de « pyramide » que l'on reconnaîtra à sa base, qui est un polygone, son sommet et ses faces latérales qui sont des triangles, en veillant à ne présenter aux élèves que des pyramides régulières ou des représentations de pyramides régulières, mais sans chercher à différencier celles-ci des pyramides non régulières.

La progressivité des apprentissages s'organise autour des différentes descriptions, reproductions, représentations et constructions. Le document [Les solides](#), en annexe, rappelle quelques éléments sur les solides que les élèves doivent reconnaître en fin de cycle 3 et présente des tâches pouvant être proposées pour les différents solides mentionnés dans les programmes.

Les dessins en perspectives peuvent dans un premier temps être faits sur papier pointé, les exercices variés permettent de dessiner des cubes, des pavés droits ou des assemblages de cubes ou pavés droits, en variant les points de vue.

Ci-après, quelques exemples d'activités de représentation de volumes sur papier pointé proposées par l'IREM de Paris Nord dans le l'ouvrage numérique [La troisième dimension, voir et concevoir dans l'espace](#).

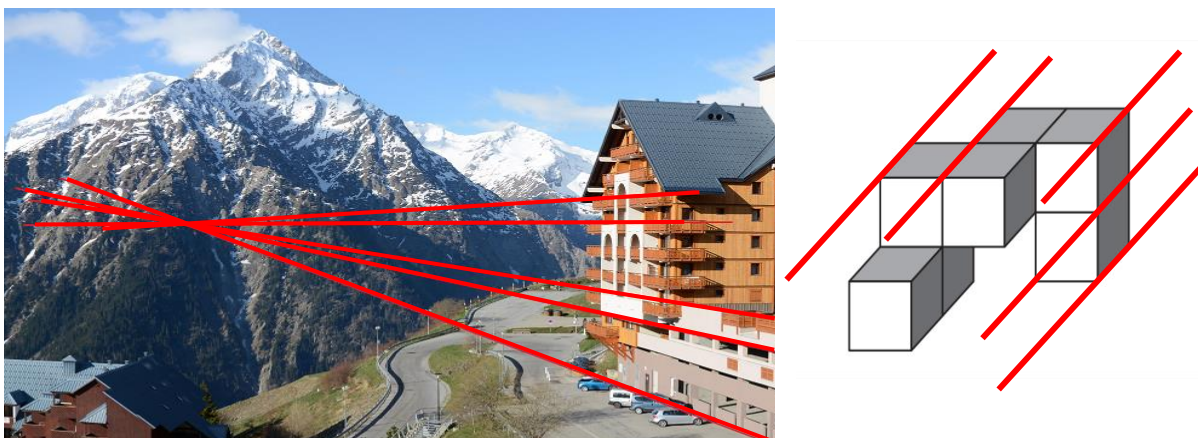


Les travaux sur la reconnaissance de patrons (dire à quel solide correspond un patron donné, dire si un patron permet de construire ou non tel ou tel solide, etc.) doivent être menés dans un premier temps avec des patrons que les élèves pourront plier pour former (ou non) les solides. Afin de leur permettre de développer progressivement les arguments permettant de valider ou non un patron (argument sur le nombre de faces, sur la position relative des faces, sur la forme des faces, sur la longueur d'arêtes devant être assemblées, etc.).

Des travaux de constructions de solides sont proposés à partir de patrons construits ou complétés par les élèves dans le cas de cubes ou de pavés droits, ou fournis par l'enseignant dans le cas de prismes ou de pyramides. Des modèles de patrons de tels solides sont disponibles dans divers ouvrages ou sur des sites internet, comme par exemple le site <http://www.korthalsaltes.com/>. Ces travaux de construction de solides à partir de patrons doivent permettre de développer l'aptitude à reconnaître le solide correspondant à un patron donné ou à accepter ou rejeter le fait qu'un patron fourni permette de construire un solide donné.

En fin de cycle 3, les élèves peuvent être invités à traiter des problèmes liant leurs connaissances sur les volumes (grandeurs et mesures) et les solides (Espace et géométrie), par exemple : « Construire le patron d'un pavé droit ayant un volume de 72 cm^3 ».

Au cycle 3, les élèves continuent également à travailler avec des représentations de l'espace et d'objets en trois dimensions. Ils sont à la fois confrontés à des représentations en perspective linéaire (photographies, tableaux, etc.), où les droites parallèles (dans l'espace en trois dimensions) se coupent en un point appelé point de fuite comme sur la photographie ci-dessous et à des représentations en perspective cavalière où les droites parallèles ne se coupent pas comme sur le solide ci-dessous.



Aucun cours théorique n'est mené sur ces différents types de représentation en perspective, ni sur leurs propriétés, l'enseignant s'assure seulement que les élèves travaillent au cours du cycle 3 avec ces différentes représentations et réussissent à faire le lien entre les objets réels, en trois dimensions, et leurs différentes représentations en deux dimensions.

Les outils numériques en géométrie

Au cycle 2 comme au cycle 3, faire le lien entre l'espace en trois dimensions dans lequel nous vivons et ses représentations en deux dimensions (dessin, photographies, etc.) peut être difficile pour les élèves. L'utilisation de logiciels de géométrie dans l'espace, présentés en vidéoprojection, peut permettre de faciliter la compréhension de ces représentations en permettant de faire tourner un objet grâce à un logiciel de géométrie dynamique en trois dimensions ou de se déplacer dans un environnement filmé (la classe par exemple), en effectuant des arrêts sur image, permettant de lier l'objet ou la scène à une représentation en deux dimensions.

Lors des temps de construction, l'outil numérique peut s'avérer particulièrement utile pour diffuser, en boucle, une vidéo de la construction à effectuer à laquelle les élèves pourront se référer s'ils rencontrent des difficultés (construction d'un losange en CM1, construction d'une droite parallèle à une autre droite et passant par un point donné en CM2, construction d'un angle d'une mesure donnée en sixième⁷).

L'utilisation de logiciels en ligne peut être intéressante dans le cadre de travaux sur la symétrie axiale pour éviter aux élèves d'avoir recours systématiquement au pliage (voir le paragraphe ci-dessus consacré à la symétrie axiale).

⁷ Voir par exemple l'annexe [Plus près de l'angle](#) de la ressource [Les mathématiques par le jeu](#), mise en ligne sur la page éducol des [ressources d'accompagnement du programme de mathématiques du cycle 4](#).

L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique au cycle 3, par l'enseignant face à la classe en vidéoprojection ou par les élèves eux-mêmes, doit permettre de familiariser les élèves à un outil qu'ils utiliseront au cycle 4 dans le cadre de la résolution de problèmes notamment pour émettre des conjectures. Cet outil peut permettre de faire travailler les élèves sur les propriétés des figures géométriques planes, en utilisant l'aspect dynamique du logiciel, la déformation d'une figure fera que certaines propriétés seront ou non conservées (voir par exemple le document [Les quadrilatères](#) en annexe).

Néanmoins, si l'utilisation de logiciel de géométrie dynamique peut présenter des avantages, voire être nécessaire pour certains élèves (cas de dyspraxies lourdes, handicap), la manipulation physique des outils de construction est essentielle et ne doit pas être négligée, elle est au cœur des apprentissages en géométrie au cycle 3.

Exemples de situations d'apprentissage

[La géométrie flash](#) : La géométrie flash (ou géométrie mentale) est le pendant géométrique de ce qui est proposé sur les nombres et le calcul pendant les temps de calcul mental.

[Les solides](#) : Ce document permet de rappeler quelques éléments sur les solides que les élèves doivent reconnaître en fin de cycle 3 et présente des tâches pouvant être proposées pour les différents solides mentionnés dans les programmes pour « *Reconnaitre, nommer, décrire, reproduire, représenter et construire quelques solides* ».

[Les quadrilatères](#) : Cette annexe présente une activité à mener avec le logiciel Geogebra et permettant de renforcer la connaissance des définitions et propriétés des quadrilatères usuels. L'aspect dynamique du logiciel est ici utilisé pour déformer des figures conservant certaines propriétés. L'activité est déclinée en 4 versions (avec 2, 4, 6 ou 8 quadrilatères).

[Les programmes de construction](#) : Au cycle 2, les élèves ont rencontré leurs premiers programmes de construction à la fois pour construire des figures en suivant un programme mais aussi en écrivant un programme pour construire une figure donnée. Au cycle 3, le travail sur les programmes de construction se poursuit avec des constructions plus complexes.

[Activités sur le cube](#) : Quatre activités avec des cubes pouvant être menées avec les élèves de cycle 3.

Annexes

[Les polygones](#) : Ce document rappelle des éléments de vocabulaire, des définitions, des propriétés et des propriétés caractéristiques pouvant être rencontrées au cycle 3 dans le cadre de l'étude des polygones usuels.

[Le disque et le cercle](#) : Ce document, à l'usage des enseignants, rappelle le vocabulaire pouvant être rencontré par les élèves dans le cadre de travaux sur le cercle tout au long du cycle 3.

[Les angles](#) : Ce document, à l'usage des enseignants, rappelle le vocabulaire pouvant être rencontré par les élèves dans le cadre de travaux sur les angles au cours du cycle 3.